УДК 514.75

С.В. Мотошкина
(Иркутский государственный университет)

КРИВЫЕ В КОНФОРМНО-ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ОКТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрены кривые в семимерном конформно-октавном псевдоевклидовом пространстве, где возможны три случая в которых:

1) длина касательного вектора положительно определена;
2) длина касательного вектора отрицательно определена;
3) касательный вектор изотропный.

Для каждого случая методом внешних форм Картана построены канонические реперы, найдены их геометрические характеристики. Натуральный параметр вводится как величина угла между касательными векторами в начальной и текущей точках.

Пусть R^8 – алгебра октав и $R^8 = R^1 \oplus V$, где V – ортогональное дополнение к единице. $V = R^7$ является алгеброй относительно векторного произведения [,], определенного в базисе $\{e_1,..,e_7\}$ таблицей умножения обобщенной алгебры Кэли. V – антикоммутативная алгебра без единицы. Скалярное произведение определено с точностью до множителя и имеет сигнатуру (3; 4), т. е.

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = \alpha^2,\ e_4^2 = e_5^2 = e_6^2 = e_7^2 = -\alpha^2. \qquad (1)$$

При изучении кривых в пространстве V возникает необходимость рассмотреть три случая, связанных с длиной касательного вектора. Длина может быть положительной, отрицательной или изотропной в силу того, что пространство псевдоевклидово. Рассмотрим случаи, когда длина положительная и изотропная, а случай отрицательной длины опустим потому, что можно провести аналогию с положительным случаем.

Пусть дана кривая $r = r(t)$ (сразу исключаем вырожденные линии и прямые). Общий подвижной репер пространства V состоит из радиус-вектора r начала координат и семи базисных векторов e_i, где $i = 1,..,7$. Предположим, что $(dr)^2 > 0$, тогда пусть $dr \parallel e_1$, так как $e_1^2 > 0$. Применяя метод внешних форм Картана, получим следующие формулы для канонического репера кривой:

$$\left.\begin{aligned}
&r' = e_1,\\
&e_1' = K_1 e_1 + e_2,\\
&e_2' = -e_1 + K_1 e_2 + K_2 e_3 + K_3 e_4\\
&e_3' = -K_2 e_2 + K_1 e_3 - K_3 e_5,\\
&e_4' = K_3 e_2 + K_1 e_4 + K_4 e_5 + K_5 e_6 + K_6 e_7,\\
&e_5' = -K_3 e_3 - K_4 e_4 + K_1 e_5 + (1 - K_6) e_6 + K_5 e_7,\\
&e_6' = -K_5 e_4 + (K_6 - 1) e_5 + K_1 e_6 + (K_2 - K_4) e_7,\\
&e_7' = -K_6 e_4 - K_5 e_5 + (K_4 - K_2) e_6 + K_1 e_7,
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где $K_i = K_i(s)$ – некоторые гладкие функции ($i = 1,6$).

Натуральный параметр s мы не можем определить как длину дуги, так как наше пространство конформное, т.е. длина определена с точностью до множителя. Однако его можно ввести как величину угла между касательными векторами в начальной и текущей точках.

Вектор e_1 – направляющий вектор касательной: $e_1 = r'$. Тогда $e_1' = r''$. Из формул (2) следует, что $e_2 = r'' - K_1 r'$, $e_3 = [e_1, e_2] = [r', r'']$.

Найдем вычислительные формулы для K_1, K_2. Из равенства $< e_1, e_2 > = 0$ находим

$$K_1 = < r', r'' > / | r' |^2. \qquad (3)$$

Из равенства $< e_2', e_3 > = K_2 e_3^2$ получаем

$$K_2 = (r', r'', r''') / |[r', r'']|^2. \qquad (4)$$

Из формул (2) имеем $e_4 = (e_2' + e_1 - K_1 e_2 - K_2 e_3)/K_3$, $e_5 = (-e_3' - K_2 e_2 + K_1 e_3)/K_3$. Вычислим K_3 из равенства $e_1 = [e_4, e_5]$:

$$\begin{aligned}K_3^2 = &-|[r', r''']|^2/2|r'|^2 + K_2 (r', r'', r''')/|r'|^2 +\\ &+ K_1 (r', r''', [r', r''])/|r'|^2 + 2K_1 (r', r'', [r', r'''])/|r'|^2 -\\ &- K_1^2 |[r', r'']|^2/2|r'|^2 + K_2 (r', r'', r''') - K_1^2 + K_2^2.\end{aligned}$$

Далее,

$$e_6 = -[e_2, e_4],\ e_7 = -[e_3, e_4],$$
$$K_4 = < e_4', e_5 > / | e_5 |^2,\ K_5 = < e_4', e_6 > / | e_6 |^2,$$
$$K_6 = < e_4', e_7 > / | e_7 |^2.$$

Аналогично исследуются кривые, для которых $(dr)^2 < 0$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Задание произвольных шести гладких функций $K_i(s)$, $i = 1,..,6$, определяет неизотропную кривую в конформно-псевдооктавном пространстве с точностью до изоморфизма.*

Особый интерес представляет изучение изотропных кривых. Для этого введем изотропный базис, в котором удобнее исследовать кривую такого типа. Положим

$$E_1 = e_1 + e_5,\ E_2 = e_2 + e_6,\ E_3 = e_3 + e_7,\ E_4 = e_4,$$
$$E_5 = e_1 - e_5,\ E_6 = e_2 - e_6,\ E_7 = e_3 + e_7. \qquad (5)$$

Ненулевые скалярные произведения базисных векторов E_i имеют вид

$$< E_1, E_5 > = < E_2, E_6 > = < E_3, E_7 > = 2\alpha^2,\ E_4{}^2 = -\alpha^2. \qquad (6)$$

Таблица векторных произведений определяется следующим образом:

$$[E_1, E_2] = 2E_7,\ [E_1, E_3] = -2E_6,\ [E_1, E_4] = -E_1,$$
$$[E_1, E_5] = -2E_4,\ [E_1, E_6] = 0,\ [E_1, E_7] = 0,$$
$$[E_2, E_3] = 2E_5,\ [E_2, E_4] = -E_2,\ [E_2, E_5] = 0,$$
$$[E_2, E_6] = -2E_4, [E_2, E_7] = 0,\ [E_3, E_4] = -E_3,$$
$$[E_3, E_5] = 0,\ [E_3, E_6] = 0,\ [E_3, E_7] = -2E_4,$$
$$[E_4, E_5] = -E_5,\ [E_4, E_6] = -E_6,\ [E_4, E_7] = -E_7,$$
$$[E_5, E_6] = 2E_3,\ [E_5, E_7] = -2E_2,\ [E_6, E_7] = 2E_1.$$

Пусть $r = r(t)$ – изотропная кривая, т. е. $(dr)^2 = 0$. Следовательно, можно выбрать подвижной репер так, что $dr \parallel E_1$ (так как $E_1{}^2 = 0$).

Применяя метод внешних форм Картана, получим следующие деривационные формулы канонического репера изотропной кривой:

$$\left.\begin{aligned}
&r' = E_1,\\
&E_1' = \kappa_1 E_1 + E_2 + 2E_4,\\
&E_2' = \kappa_2 E_1 + \kappa_1 E_2 + E_3 + 2\kappa_3 E_7,\\
&E_3' = \kappa_4 E_1 + \kappa_5 E_2 + 3\kappa_1 E_3 - 2\kappa_3 E_4 - 2\kappa_3 E_6,\\
&E_4' = 2\kappa_3 E_1 + \kappa_1 E_4 + E_5 - \kappa_3 E_7,\\
&E_5' = \kappa_3 E_2 + 4\kappa_3 E_4 + \kappa_1 E_5 - \kappa_2 e_6 - \kappa_4 E_7,\\
&E_6' = -\kappa_3 E_1 - E_3 - E_5 - \kappa_5 E_7,\\
&E_7' = E_2 - E_6 - \kappa_1 E_7,
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

где $\kappa = \kappa_i(\sigma)$ – некоторые гладкие функции ($i = 1,..,5$).

Натуральный параметр вычисляется по формуле

$$(d\sigma)^2 = |\,[dr, d^3r]\,|^2 / 4\,(dr, d^2r, d^3r).$$

Чтобы избежать громоздких формул, построим алгоритм для вычисления базисных векторов E_i и инвариантов κ_i. Предполагаем, что $(r'')^2 \neq 0,\ 4(r'')^2 - (r', r'', r''') \neq 0$. Сначала находим

$$E_1 = r', \; E_7 = 0{,}5[r', r''] + r', \; \kappa_1 = 2\langle r'', \; r'''\rangle / (4(r')^2 (r', r'', r''')).$$

Далее получаем векторы

$$E_4 = [r''', E_7] / 6 + \kappa_1 [r', r''] / 3 + 2r'' / 3,$$
$$E_2 = -[r''', E_7] / 3 - 2\kappa_1 [r', r''] / 3 - r'' / 3 - \kappa_1 r',$$
$$E_6 = -E_7' + E_2 - \kappa_1 E_7.$$

Затем вычисляем

$$\kappa_3 = -(E_4')^2 / 2(r')^2 + \kappa_1^2 / 8,$$
$$E_5 = E_4' - 2\kappa_3 E_1 - \kappa_1 E_4 + \kappa_3 E_7, E_3 = 0{,}5 [E_5, E_6],$$
$$\kappa_2 = -2\langle E_2', \; E_5\rangle / (r')^2, \kappa_4 = -2\langle E_3', \; E_5\rangle / (r')^2,$$
$$\kappa_5 = -2\langle E_3', \; E_6\rangle / (r')^2.$$

Итак, мы рассмотрели репер кривой, касательные к которой всюду изотропны. Производные более высокого порядка вектор-функции, задающей кривую, предполагаются неизотропными. Справедлива следующая

Теорема 2. *Задание произвольных пяти гладких функций $\kappa_i(\sigma)$ определяет с точностью до изоморфизма изотропную кривую в конформно-псевдооктавном пространстве.*

Список литературы

1. *Грушко П. Я., Кузуб Н.М.* О псевдоевклидовом варианте алгебры октав // Диф. геом. обобщ. простр. с фунд. группой. Иркутск, 1998. С. 15 – 29.

2. *Постников М.М.* Группы и алгебры Ли. М., 1982.

3. *Фавар Ж.* Курс локальной дифференциальной геометрии. М., 1960.

S. Motoshkina

CURVES IN CONFORMALLY PSEUDOEUCLIDEAN OCTONION SPACE

Curves in 7-dimensional conformally octonion pseudoeuclidean space are considered. There are three cases. 1) tangent vectors are spacelike, 2) they are timelike, 3) tangent vectors are isotropic. For each case by the method of the exterior forms of E. Cartan canonical frames are constructed; their geometrical characteristics are detected.

In particularly, the natural parameter is an angle between tangent vectors at initial and current points.