УДК 514.75

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_m В МНОГООБРАЗИЕ ГИПЕРКВАДРИК ПРОСТРАНСТВА P_n

Н.Н. Иванищева

(*Калининградский государственный университет*)

Изучается дифференцируемое отображение f: $P_m \to R(Q)$ проективного пространства P_m в многообразие гиперквадрик $R(Q)$ проективного пространства P_n. Введено понятие инфлексионной кривой $l{:}R \to R(Q)$ в элементе $\overset{0}{Q}$, сформулированы необходимое и достаточное условия инфлексионности кривой $l{:}R \to R(Q)$ в элементе $\overset{0}{Q}$. Рассмотрены характеристические прямые и характеристические направления отображения f.

1. **Дифференциальные уравнения отображения.** Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n. Отнесем его к подвижному реперу $\{A_0, A_1, ..., A_n\}$. Деривационные формулы репера имеют вид: $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$ $(\alpha, \ldots = \overline{0, n})$, причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям Картана $D\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$ и условию $\omega_0^0 + \omega_1^1 + \ldots + \omega_n^n = 0$.

Уравнение гиперквадрики Q_{n-1} пространства P_n имеет вид: $a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$, причем $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $\det(a_{\alpha\beta})$=const.

Пусть $a^{\alpha\beta}$ - компоненты матрицы, обратной к матрице $(a_{\alpha\beta})$. Обозначим:

$$\theta_{\alpha\beta} \equiv da_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma - a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma. \tag{1}$$

Рассмотрим другое проективное пространство P_m. Отнесем его к подвижному реперу $\{B_0, B_1, ..., B_m\}$. Деривационные формулы репера имеют вид: $dB_{\bar{I}} = \Omega_{\bar{I}}^{\bar{K}} B_{\bar{K}}$ $(\bar{I}, \ldots = \overline{0, m})$, причем формы Пфаффа $\Omega_{\bar{I}}^{\bar{K}}$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана $d\Omega_{\bar{I}}^{\bar{K}} = \Omega_{\bar{I}}^{\bar{T}} \wedge \Omega_{\bar{T}}^{\bar{K}}$ и условию $\Omega_0^0 + \Omega_1^1 + \ldots \Omega_m^m = 0$.

Рассмотрим дифференцируемое отображение $f{:}P_m \to R(Q)$ пространства P_m в многообразие гииперквадрик $R(Q)$ проективного пространства P_n. Система дифференциальных уравнений отображения f имеет вид:

$$\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta I}\Omega^I \quad (I, \ldots = \overline{1, m}). \tag{2}$$

Дважды продолжая систему дифференциальных уравнений (2) отображения f, получим:

$$\nabla\Lambda_{\alpha\beta I} = \Lambda_{\alpha\beta IK}\Omega^K, \ \nabla\Lambda_{\alpha\beta IK} + \Lambda_{\alpha\beta(I}\Omega_{K)}^0 = \Lambda_{\alpha\beta IKT}\Omega^T, \tag{3}$$

где круглые скобки обозначают циклирование, а дифференциальный оператор ∇ имеет вид:

$$\nabla E_{\alpha\beta IK} = dE_{\alpha\beta IK} - E_{\gamma\beta IK}\omega^{\gamma}_{\alpha} - E_{\alpha\gamma IK}\omega^{\gamma}_{\beta} -$$
$$- E_{\alpha\beta TK}(\Omega^{T}_{I} - \delta^{T}_{I}\Omega^{0}_{0}) - E_{\alpha\beta IT}(\Omega^{T}_{K} - \delta^{T}_{K}\Omega^{0}_{0}).$$

Из уравнений (3) следует, что системы величин

$$\Gamma_1 = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta}\},\ \Gamma_2 = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta I}, \Lambda_{\alpha\beta IK}\} \qquad (4)$$

являются фундаментальными объектами отображения f первого и второго порядка соответственно.

2. **Инфлексионная кривая.**

Определение 1. Элементом $\overset{0}{Q}$ будем называть гиперквадрику $\overset{0}{a}_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0$ такую, что $f(B_0) = \overset{0}{Q}$.

Определение 2. Кривой в многообразии гиперквадрик R(Q) называется дифференцируемое отображение $l{:}R \to R(Q)$, $l(0) = \overset{0}{Q}$.

Разложение в ряд Тейлора отображения $l{:}R \to R(Q)$ имеет вид:

$$a_{\alpha\beta} = \overset{0}{a}_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta} t + \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} t^2 + <3>.$$

Определение 3. Кривая $l{:}R \to R(Q)$ называется инфлексионной кривой в элементе $\overset{0}{Q}$, если выполняется условие $M_{\alpha\beta} = k\Lambda_{\alpha\beta}$.

Введенное понятие имеет следующий геометрический смысл.

Теорема 1. Кривая $l{:}R \to R(Q)$ является инфлексионной в элементе $\overset{0}{Q}$ тогда и только тогда, когда фокальные многообразия первого и второго порядка кривой $l{:}R \to R(Q)$ совпадают в элементе $\overset{0}{Q}$.

3. **Характеристические направления.** Рассмотрим случай, когда m=N, где N - размерность многообразия гиперквадрик R(Q) проективного пространства P_n. Фундаментальный объект второго порядка Γ_2 определяет для любой точки B_0 инвариантное алгебраическое многообразие I

$$\Lambda_{\alpha\beta IK} X^I X^K - 2\Lambda_{\alpha\beta I} X^I X^0 = 0,$$

которое называется индикатрисой. Рассмотрим множество X, которое состоит из прямых связки $\{B_0\}$, имеющий с индикатрисой I две общие точки.

Определение 4. Прямая $\Lambda \in X$ называется характеристической прямой отображения f, а направление, определяемое этой прямой в точке B_0, называется характеристическим направлением.

Объект Λ^I задает характеристическое направление в том и только том случае, когда выполняется условие

$$\Lambda_{\alpha\beta IK}\Lambda^I \Lambda^K - 2\mu\Lambda_{\alpha\beta I}\Lambda^I = 0.$$

Рассмотрим кривую $L{:}R \to P_m$, $L(0) = B_0$, для которой разложение в ряд Тейлора имеет вид :

$$У^{I}=\Lambda^{I}t+\frac{1}{2}M^{I}t^{2}+<3>. \qquad (5)$$

Она задает в точке B_0 направление, определяемое объектом Λ^{I}. Кривая (5) является инфлексионной [1] в точке B_0, если $M^{I}=k_{1}\Lambda^{I}$.

Теорема 2. Инфлексионная в точке B_0 кривая $L:R\rightarrow P_m$ задает в ней характеристическое направление в том и только том случае, если кривая $f\circ h$ является инфлексионной кривой в элементе $\overset{0}{Q}$, т.е. фокальные многообразия первого и второго порядка кривой $f\circ L$ совпадают.

4. **Объект связности Леви-Чивита.** Рассмотрим метрику, которая определяется как след квадрата преобразования $a^{\alpha\beta}\theta_{\beta\gamma}$. Имеем:

$$ds^{2}=a^{\alpha\beta}\theta_{\beta\gamma}\circ a^{\gamma\delta}\theta_{\delta\alpha}=M_{IK}\Omega^{I}\Omega^{K},$$

где

$$M_{IK}=a^{\alpha\beta}\Lambda_{\beta\gamma I}a^{\gamma\delta}\Lambda_{\delta\alpha K.}$$

Введем в рассмотрение объект $V^{\alpha\beta I}$, определяемый следующими равенствами:

$$\Lambda_{\alpha\beta I}V^{\gamma\delta I}=\frac{1}{2}\delta^{\gamma}_{(\alpha}\delta^{\delta}_{\beta)},\quad \Lambda_{\alpha\beta I}V^{\alpha\beta K}=\delta^{K}_{I}.$$

Обозначим $M^{IK}\equiv a_{\alpha\beta}V^{\beta\gamma I}a_{\gamma\delta}V^{\delta\alpha K}$. Легко показать, что $M_{IK}M^{KL}=\delta^{L}_{I}$, т.е. матрицы (M_{IK}) и (M^{IK}) взаимно обратны.

Дифференциальные уравнения объекта M_{IK} имеют вид:

$$\nabla M_{IK}=M_{IKL}\Lambda^{L},$$

где

$$M_{IKL}=a^{\alpha\beta}\Lambda_{\beta\gamma IL}a^{\gamma\delta}\Lambda_{\delta\alpha K}+a^{\alpha\beta}\Lambda_{\beta\gamma I}a^{\gamma\delta}\Lambda_{\delta\alpha KL}-\Lambda_{\beta\gamma I}\Lambda_{\delta\alpha K}\Lambda_{\xi\eta L}(a^{\alpha\eta}a^{\xi\beta}a^{\gamma\delta}+a^{\alpha\beta}a^{\xi\delta}a^{\gamma\eta}).$$

Для объекта Γ^{L}_{IK} связности Леви-Чивита [2] получаем

$$\Gamma^{L}_{IK}=\frac{1}{2}M^{LH}(M_{IHK}+M_{HKI}-M_{IKH})=V^{\alpha\beta L}\Lambda_{\alpha\beta IK}-\frac{1}{2}a^{\gamma\delta}V^{\alpha\beta L}(\Lambda_{\beta\gamma I}\Lambda_{\delta\alpha K}+\Lambda_{\delta\beta I}\Lambda_{\gamma\alpha K}).$$

Заметим, что система величин $V^{\alpha\beta L}\Lambda_{\alpha\beta IK}$ является аналогом объекта связности Г. Врэнчану [3] точечного соответствия.

Библиографический список

1. *Рыжков В.В.* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Алгебра. Топология. Геометрия. 1970 / ВИНИТИ. М., 1971. С.153-174.

2. Кобаяси *Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.1. С.153-157.

3. *Vranceanu G.* Sue tensore associato ad corrispondenza fra spazi proettivi // Boll. Unione mat. ital. 1957. V.12. N4. P.489-506.

N.N. Ivanicsheva

DIFFERENTIABLE MAPPING OF PROJECTIVE SPACE P_n INTO MANIFOLD OF HIPERQUADRICS OF THE SPACE P_n

Differentiable mapping f: $P_m \to R(Q)$ of the projective space P_m into manifold of hyperquadrics R(Q) of the projective space P_n are studied. The notions of inflexional curve l:☼→R(Q) in the element $\overset{\circ}{Q}$ is introduced. Necessery and sufficient conditions of inflexion of the curve l:☼→R(Q) in the element $\overset{\circ}{Q}$ are formulated. Characteristic straight lines and characteristic directions of the mapping f are considered.

УДК 514.75

SPEZIELLE DISTRIBUTIONEN AUF GRASSMANN'SCHER MANNIGFALTIGKEIT (III)

V.V. Kaiser

(Friedrich -Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg)

Mit Hilfe des analytischen Apparat [1] sind speziellen nichtholonomen Kongruenzen bestimmt und entsprechende Ergebnisse, die im ersten Teil des Sufsatzes [2] formuliert sind, bewiesen.

3. Nichtholonome Kongruenzen.

3.1. Allgemeine Klassifikation. Aus dem Lemma 2.1 [1] folgt, daβ jede beliebige 2-dimensionale Distribution k (nicht holonome Kongruenz) auf der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M mit Hilfe von einem Pfaff'schen Gleichungssystem

$$\begin{cases} a_1\Omega^1 + a_2\Omega^2 + a_3\Omega^3 + a_4\Omega^4 = 0, \\ b_1\Omega^1 + b_2\Omega^2 + b_3\Omega^3 + b_4\Omega^4 = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

(local) bestimmt werden kann, wobei der Rang der Matrix des Systems (3.1) gleich zwei sein muβ.

Es sei $T = t^0A_0 + t^1A_1$ ein Punkt auf der laufenden Geraden $l \in M$. Aus (2.1) mit der Berücksichtigung von (2.3) folgt

$$dT = \left(dt^0 + t^0\omega_0^0 + t^1\omega_1^0\right)A^0 + \left(dt^1 + t^0\omega_0^1 + t^1\omega_1^1\right)A^1 + \\ + \left(-t^0\Omega^3 + t^1\Omega^1\right)A_2 + \left(t^0\Omega^4 + t^1\Omega^2\right)A_3. \tag{3.2}$$

Daraus folgt, daβ der Punkt T den Brennpunkt einer integralen Torse (aufrollbaren Fläche) für k ist, wenn zusätzlich zu (3.1) gelten