

Н. Л. Великанов, В. А. Наумов, С. И. Корягин

ВРАЩЕНИЕ ЦИЛИНДРА В НАТЕКАЮЩЕМ ПОТОКЕ

40

Рассмотрены особенности моделирования динамики вращательного движения цилиндрического стержня в однородном потоке вязкой жидкости. Численными методами исследованы угол атаки, угол поворота, угловая скорость стержня. Представлены результаты решения краевой численным методом в среде Mathcad. Графики представлены в безразмерных переменных. Получено, что угловая скорость стержня под действием силы тяжести со временем увеличивается до максимального значения, а затем стремится к нулю. При этом угол перестает изменяться, это означает, что достигнуто положение равновесия.

The features of modeling the dynamics of the rotational movement of a cylindrical rod in a homogeneous flow of a viscous liquid are considered. The angle of attack, the angle of rotation, and the angular velocity of the rod are studied numerically. The results of solving the boundary value problem using the numerical method in Mathcad are presented. Graphs are presented in dimensionless variables. It is obtained that the angular velocity of the rod under the action of gravity increases to the maximum value over time, and then tends to zero. In this case, the angle stops changing, which means that the equilibrium position has been reached.

Ключевые слова: динамика стержня, вязкая среда, вращение цилиндра.

Keywords: dynamics of rod, viscous medium, cylinder rotation.

Решение многих инженерных задач опирается на исследование динамики стержневых конструкций в вязкой среде [1 – 3]. Среди них и динамика подводных буксируемых объектов [4], и движение затворов гидротехнических сооружений [5], и транспортировка леса [6], и расчет ударного разрушения зданий и сооружений [7], и механика элементов орудий промышленного рыболовства [8], и многие другие задачи. При поступательном движении, когда скорости всех точек стержня одинаковы, задача сводится к расчету коэффициентов гидродинамического сопротивления. Если же движение включает вращательную составляющую, то требуется определить локальные скорости точек, записать зависимость сил от них, а затем выполнить интегрирование. При этом сами скорости зависят от действующих сил.

На рисунке 1 представлена известная схема (см.: [9; 10]) гидродинамических сил, действующих на элемент цилиндрического стержня $d\xi$, ось которого расположена под углом α к скорости относительного движения V . При непоступательном движении стержня величина и направление скорости будут зависеть от координаты стержня ξ .

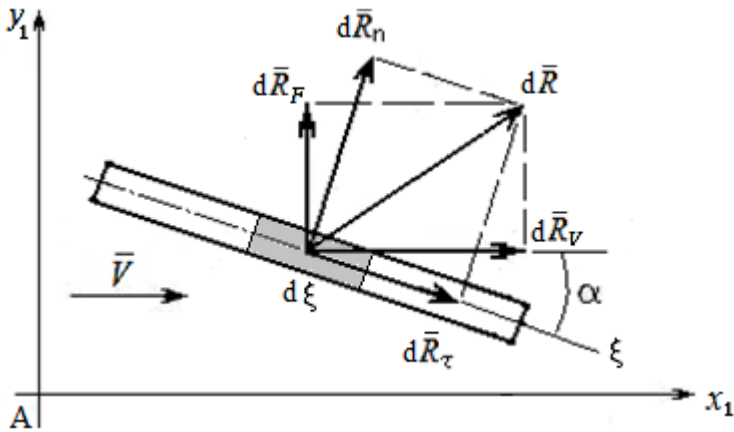


Рис. 1. Схема гидродинамических сил, действующих на малый элемент стержня

Для элемента цилиндра систему координат (поточную) необходимо выбирать так, чтобы ось цилиндра ξ и вектор скорости относительного движения элемента стержня принадлежали плоскости x_1Ay_1 . При этом ось Ay_1 совсем не обязательно будет вертикальной. Острый угол между вектором относительной скорости и осью стержня α называют углом атаки.

В общем случае гидродинамическую силу можно представить в поточной системе координат:

$$d\vec{R} = d\vec{R}_V + d\vec{R}_F + d\vec{R}_B, \tag{1}$$

где R_V – величина силы лобового гидродинамического сопротивления; R_F – подъемной (распорной) силы; R_B – боковой силы. Последняя действует только при особых условиях и далее не рассматривается.

Силы гидродинамического сопротивления, действующие на малый элемент стержня, рассчитывают по известным формулам:

$$dR_V = 0,5 \cdot C_V \cdot D \cdot d\xi \cdot \rho \cdot V^2, \quad dR_F = 0,5 \cdot C_F \cdot D \cdot d\xi \cdot \rho \cdot V^2, \tag{2}$$

где D – диаметр цилиндрического стержня; ρ – плотность жидкости; C_V, C_F – коэффициенты сопротивления.

Разложим элементарную силу на оси естественной системы координат (главную нормаль и касательную):

$$d\vec{R} = d\vec{R}_n + d\vec{R}_\tau. \tag{3}$$

Для лобового сопротивления используем зависимость из работы [3] при $n=2,7$:

$$C_V(\alpha) = C_0 + (C_{90} - C_0) \cdot (\sin \alpha)^n, \tag{4}$$

где C_0, C_{90} – коэффициенты $\alpha=0$ и $\alpha=90^\circ$.



Для коэффициента подъемной силы далее будем использовать хорошо зарекомендовавшую себя зависимость (5) [8]:

$$C_F = C_{90} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha. \quad (5)$$

Базовым для расчетов является коэффициент гидродинамического сопротивления цилиндра при его поперечном обтекании C_{90} . Многочисленными исследованиями (см.: [6; 11] и библиографии в них) было установлено, что указанный коэффициент зависит от следующих безразмерных параметров: числа Рейнольдса Re , удлинения цилиндра λ и относительной шероховатости поверхности δ :

$$Re = V \cdot D / \nu, \quad \lambda = L / D, \quad \delta = \Delta / L, \quad (6)$$

где L — длина стержня; ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости; Δ — абсолютная (эквивалентная) шероховатость поверхности цилиндрического стержня. Шероховатость поверхности цилиндра сказывается главным образом на области «кризиса сопротивления», $Re > 10^5$. Далее такие большие числа Рейнольдса не рассматриваются.

Зависимость от числа Рейнольдса. В переходной области коэффициент гидродинамического сопротивления хорошо описывается трехзвенной формулой [3; 6]:

$$C_{90} = 0,908 + \frac{2,76}{\sqrt{Re}} + \frac{4,73}{Re}, \quad 0,4 < Re < 1000. \quad (7)$$

Для достаточно больших чисел Рейнольдса закон гидродинамического сопротивления считают квадратичным:

$$C_{90} \approx 1,0 = const \text{ при } 10^3 < Re < 8 \cdot 10^3;$$

$$C_{90} \approx 1,2 = const \text{ при } 10^4 < Re < 10^5.$$

Зависимость коэффициентов от удлинения цилиндра [3]:

$$\bar{C}_{90} = \frac{C_{90}}{C_{90}^{\infty}} = \begin{cases} 0,48 + 0,097 \cdot \ln \lambda & \text{при } \lambda \leq 200; \\ 1 & \text{при } \lambda > 200. \end{cases} \quad (8)$$

Для гладкого цилиндрического стержня при продольном обтекании ($\lambda > 20$):

$$C_0 = \begin{cases} \frac{0,777}{\lambda} + \frac{4,17}{\sqrt{\lambda \cdot Re}} & \text{при } \lambda \cdot Re \leq 40000; \\ \frac{0,777}{\lambda} + \frac{0,0964}{(\lambda \cdot Re)^{1/7}} & \text{при } \lambda \cdot Re > 40000. \end{cases} \quad (9)$$

Пусть однородный цилиндрический стержень диаметром D , плотностью ρ , длиной L полностью находится в потоке жидкости и может совершать вращательное движение вокруг неподвижной оси Oz_1 , проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 2). Скорость потока U_f постоянна.

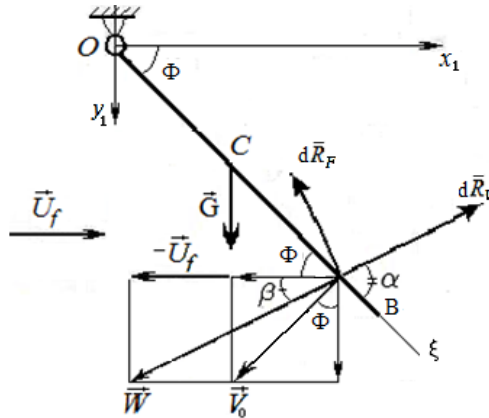


Рис. 2. Схема вращательного движения стержня в потоке

Динамика вращательного движения жесткого стержня описывается дифференциальным уравнением второго порядка с двумя начальными условиями:

$$(J_{z1} + J_{fz1}) \frac{d^2\Phi}{dT^2} = \sum_k M_{z1}(\vec{F}_k^{(e)}), \quad \Omega = \frac{d\Phi}{dT}, \quad \Phi(0) = \Phi_0, \quad \Omega(0) = \Omega_0, \quad (10)$$

где Ω — угловая скорость вращения; Φ — угол поворота стержня; J_{z1} , J_{fz1} — осевой момент инерции стержня и присоединенной массы соответственно:

$$J_{z1} + J_{fz1} = \frac{1}{3}(m + m_f) \cdot L^2 = \frac{\pi}{12} D^2 \rho \cdot L^3 (1 + \gamma). \quad (11)$$

Относительно оси Oz_1 создают момент силы тяжести, Архимеда, гидродинамического сопротивления. Кроме того, необходимо учитывать эффект присоединенных масс. Момент сил тяжести и Архимеда относительно оси Oz_1 :

$$M_{z1}(\vec{G} + \vec{F}_A) = m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot (1 - \gamma) \cdot \cos \Phi = \frac{\pi d^2}{8} \rho g L^2 (1 - \gamma) \cdot \cos \Phi, \quad \gamma = \frac{\rho_f}{\rho}. \quad (12)$$

Из сил гидродинамического сопротивления момент относительно оси Oz_1 создает только нормальная составляющая. Ее величина, действующая на малый участок стержня длиной $d\xi$:

$$dR_n(\xi) = \frac{1}{2} C_n \cdot d \cdot \rho_f \cdot W(\xi)^2 \cdot d\xi,$$

где $W(\xi)$ — локальная скорость точки стержня относительно жидкости.

Момент сил гидродинамического сопротивления относительно оси Oz_1 найдем с помощью интегрирования:

$$M_{z1}(\vec{R}_n) = -\frac{1}{2} \cdot D \cdot \rho_f \cdot \int_0^L C_n(\xi) \cdot \xi \cdot W(\xi)^2 \cdot d\xi. \quad (13)$$



Составляющие относительной скорости точек стержня:

$$W_{x1}(\xi) = U_f + \Omega \cdot \xi \cdot \sin \Phi, \quad W_{y1}(\xi) = \Omega \cdot \xi \cdot \cos \Phi, \quad W = \sqrt{W_{x1}^2 + W_{y1}^2} \quad (14)$$

Угол между вектором относительной скорости и осью стержня (локальный угол атаки) в соответствии с рисунком 2:

$$\alpha(\xi) = \Phi + \beta(\xi), \quad \beta(\xi) = \arcsin(W_{y1} / W). \quad (15)$$

Коэффициент гидродинамического сопротивления нормальной силы:

$$C_n = C_v \cdot \sin \alpha + C_f \cdot \cos \alpha. \quad (16)$$

Подставив выражения (13)–(16) в (12), получим интегрально-дифференциальное уравнение вращательного движения стержня:

$$\frac{\pi}{12} B^2 \rho L^3 (1 + \gamma) \frac{d\Omega}{dT} = \frac{\pi d^2}{8} \rho g L^2 (1 - \gamma) \cdot \cos \Phi - \frac{D}{2} \rho_f \int_0^L C_n(\xi) \cdot \xi \cdot W(\xi)^2 d\xi. \quad (17)$$

Введем безразмерные переменные

$$\tilde{\xi} = \xi \frac{\Omega}{U_f}, \quad w = \frac{W}{U_f}, \quad t = T \cdot \frac{U_f}{L}, \quad \omega = \Omega \cdot \frac{L}{U_f}. \quad (18)$$

Подставим (18) в (17) и проведем преобразования:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \Theta \cdot \cos \Phi - \Psi \cdot \int_0^1 (C_v(\tilde{\xi}) \cdot \sin \alpha + C_f(\tilde{\xi}) \cdot \cos \alpha) \cdot \tilde{\xi} \cdot w(\tilde{\xi})^2 d\tilde{\xi}; \quad (19)$$

$$\Theta = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \cdot \frac{\lambda}{Fr}, \quad \Psi = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\gamma \cdot \lambda}{1 + \gamma}, \quad Fr = \frac{U_f}{g \cdot d},$$

$$Re = \frac{W \cdot D}{\nu} = w \cdot Re_0, \quad Re_0 = \frac{U_f \cdot D}{\nu},$$

где Fr – число Фруда.

Начальные условия к уравнению (19):

$$\Phi(0) = \Phi_0, \quad \omega(0) = 0. \quad (20)$$

Задача Коши (19)–(20) была решена численным методом с помощью программы, описанной в [12]. На рисунках 3, 4 представлены результаты расчета при значениях чисел подобия: $Re_0 = 100$; $Fr = 5$; $\gamma = 0,3$; $\lambda = 30$. Угловая скорость стержня под действием силы тяжести со временем увеличивается до максимального значения, а затем со временем стремится к нулю. При этом угол перестает изменяться, это означает, что достигнуто положение равновесия. Только в положении равновесия угол между стержнем и осью Ox_1 равен углу атаки $\Phi = \alpha$.

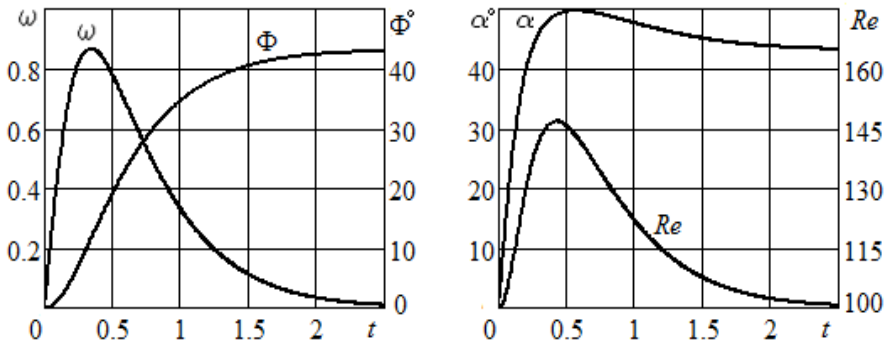


Рис. 3. Изменение по времени безразмерных функций при $\xi=1$ и значениях чисел подобия: $Re_0=100; Fr=5; \gamma=0,3; \lambda=30$

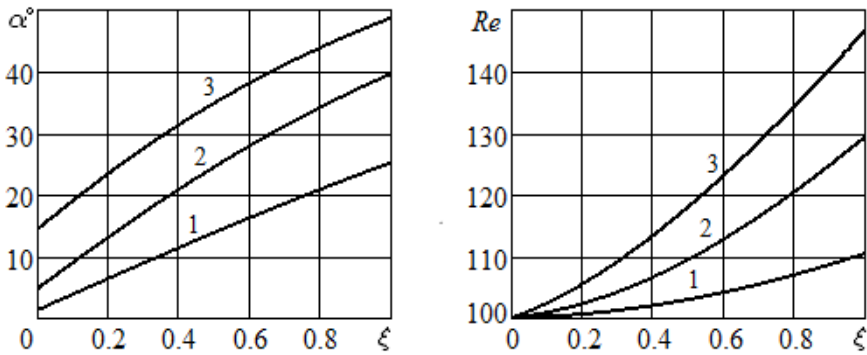


Рис. 4. Изменение вдоль стержня угла атаки и числа Рейнольдса при значениях чисел подобия $Re_0=100; Fr=5; \gamma=0,3; \lambda=30$ в разные моменты времени: 1 – $t=0,1$; 2 – $t=0,2$; 3 – $t=0,4$

Как видно на рисунке 4, локальный угол атаки во время движения зависит от положения точки на стержне (в равновесии – не зависит). Вблизи неподвижной точки O (рис. 2) $Re = Re_0$; вдоль стержня число Рейнольдса растет из-за увеличения относительной скорости.

Иследуем влияние чисел подобия на численное решение задачи. Влияние числа Рейнольдса Re_0 на изменение по времени безразмерной угловой скорости и угла поворота стержня положительное и монотонное. С увеличением Re_0 обе названные функции растут (рис. 5, 6). Максимум $\omega(t)$ повышается и несколько смещается вправо по оси времени. Угол Φ в равновесии увеличивается следующим образом: при $Re_0=50$ угол $\Phi=40,2^\circ$; $Re_0=100$ – $\Phi=43,0^\circ$; $Re_0=200$ – $\Phi=45,1^\circ$; $Re_0=200$ – $\Phi=47,0^\circ$. Локальный угол атаки вдоль стержня увеличивается примерно на 15° ; рост Re_0 в рассмотренном диапазоне привел к его увеличению на $6-7^\circ$. Естественно, что локальные числа Рейнольдса возросли прямо пропорционально значению Re_0 .

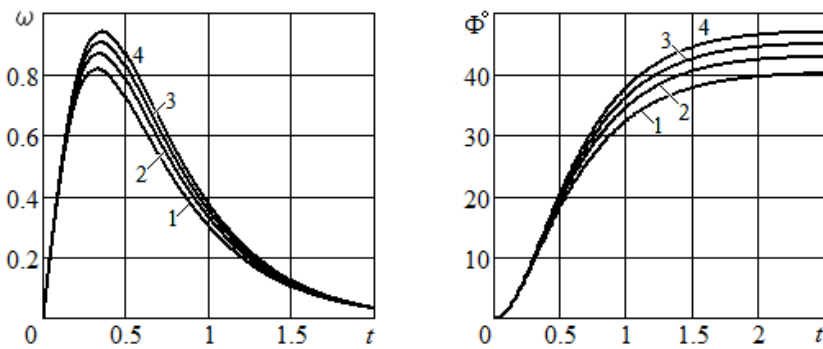


Рис. 5. Изменение по времени безразмерной угловой скорости и угла поворота стержня ($Fr=5; \gamma=0,3; \lambda=30$) Re_0 :
1 – $Re_0=50$; 2 – $Re_0=100$; 3 – $Re_0=200$; 4 – $Re_0=500$

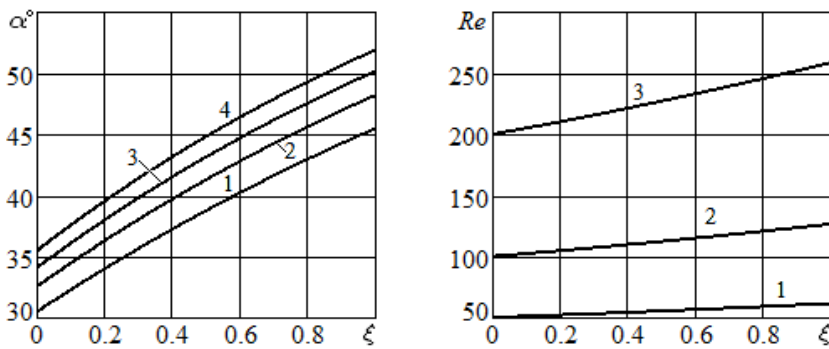


Рис. 6. Локальный угол атаки и число Рейнольдса вдоль стержня в момент времени $t=0,9$ при $Fr=5; \gamma=0,3; \lambda=30$ для разных значений Re_0 :
1 – $Re_0=50$; 2 – $Re_0=100$; 3 – $Re_0=200$; 4 – $Re_0=500$

Влияние чисел Фруда на результаты расчетов представлены на рисунках 7–9.

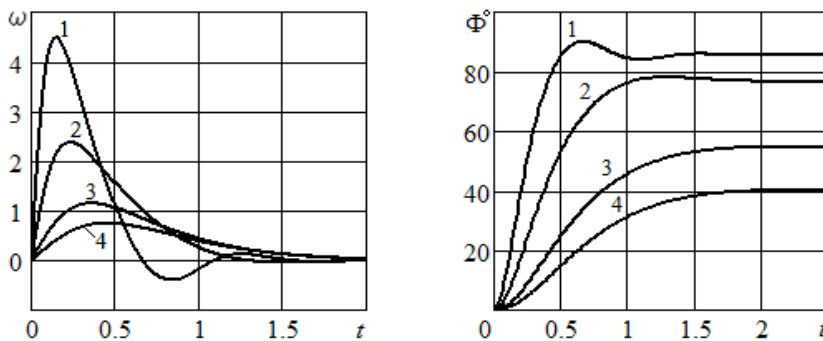


Рис. 7. Зависимость угловой скорости и угла поворота от времени ($Re_0=100; \gamma=0,2; \lambda=30$):
1 – $Fr=0,5$; 2 – $Fr=1,5$; 3 – $Fr=5$; 4 – $Fr=10$

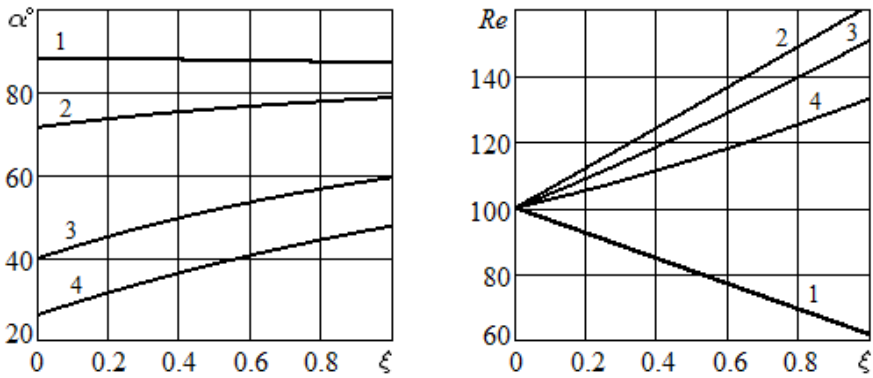


Рис. 8. Локальный угол атаки и числа Рейнольдса вдоль стержня в момент времени $t=0,8$ при $Re_0=100$; $\gamma=0,2$; $\lambda=30$ для разных Fr :
 1 – $Fr=0,5$; 2 – $Fr=1,5$; 3 – $Fr=5$; 4 – $Fr=10$

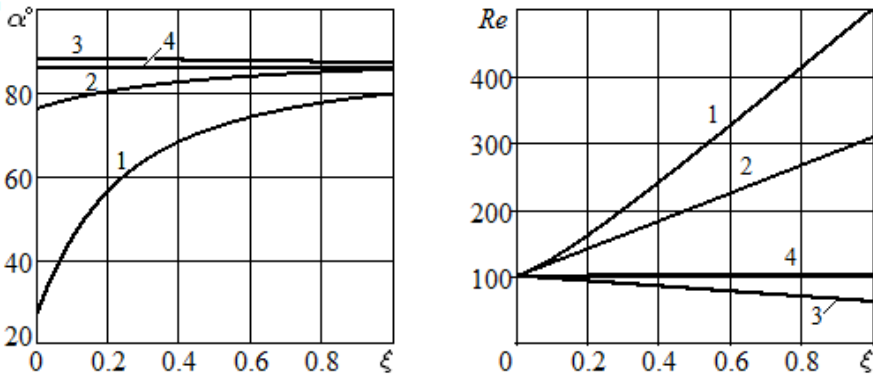


Рис. 9. Изменение вдоль стержня локального угла атаки и числа Рейнольдса при $Fr=0,5$; $Re_0=100$; $\gamma=0,2$; $\lambda=30$ для разных моментов времени:
 1 – $t=0,15$; 2 – $t=0,4$; 3 – $t=0,8$; 4 – $t=1,5$

На рисунке 7 видно, что при малых числах Фруда (в рассматриваемых условиях при $Fr < 1$) стержень несколько раз проходит положение равновесия, а не стремится к нему монотонно, как при больших числах Фруда. При этом угловая скорость вращения стержня становится отрицательной. Точки стержня имеют скорости, направленные против потока, в результате безразмерная скорость относительного движения становится меньше единицы, а локальное число Рейнольдса уменьшается вдоль оси стержня (см. линию 1 на рисунке 8 и линию 3 на рисунке 9).

Увеличение чисел Фруда соответствует росту сил гидродинамического сопротивления по сравнению с силами тяжести. Это приводит к большему отклонению стержня от вертикали (меньшие Φ).

Влияние отношения плотностей на результаты расчета показано на рисунках 10–14. При возрастании величины γ сила тяжести увеличи-



вается по сравнению с силой гидродинамического сопротивления. Поэтому значение максимума угловой скорости и угол поворота стержня становятся заметно ниже (рис. 10). В равновесии при $\gamma=0,2$ угол $\Phi=65,6^\circ$; $\gamma=0,4$ – $\Phi=44,4^\circ$; $\gamma=0,6$ – $\Phi=29,7^\circ$; $\gamma=0,8$ – $\Phi=17,6^\circ$.

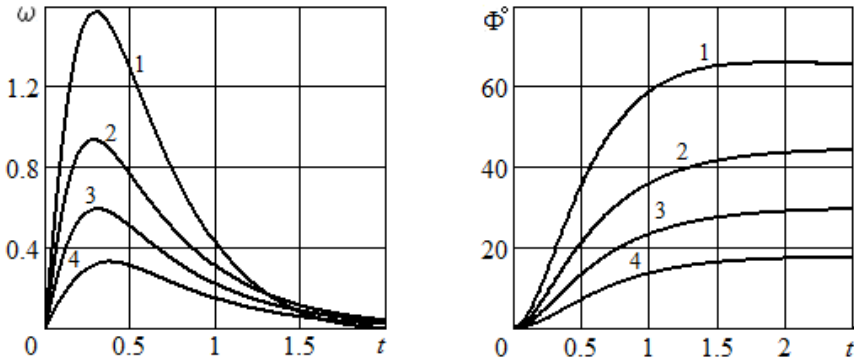


Рис. 10. Изменение по времени безразмерной угловой скорости и угла поворота стержня при $Re_0=100$; $Fr=3$; $\lambda=30$ и различных значениях отношения плотностей:
1 – $\gamma=0,2$; 2 – $\gamma=0,4$; 3 – $\gamma=0,6$; 4 – $\gamma=0,8$

При возрастании значений γ локальные углы атаки и числа Рейнольдса уменьшаются (рис. 11). В исследованном диапазоне отношения плотностей углы снижаются на $40-45^\circ$. Величины α и Re вдоль оси стержня растут. По времени обе эти величины сначала возрастают, затем Re уменьшается до нуля, а угол атаки стремится к равновесному значению Φ (рис. 12). Рисунок 13 показывает увеличение вдоль стержня локальной относительной скорости и коэффициента C_n .

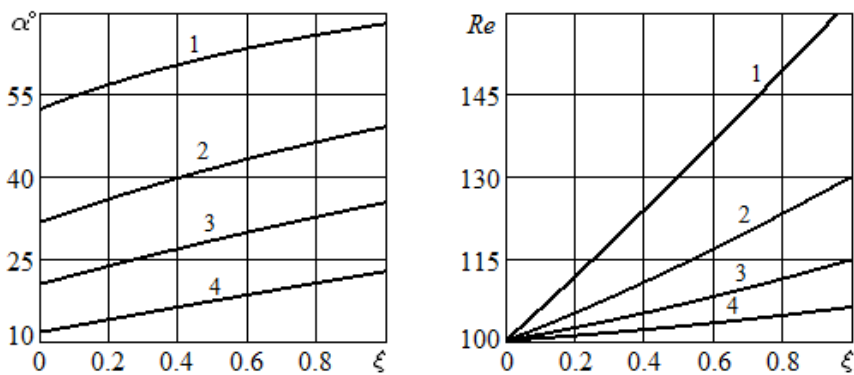


Рис. 11. Изменение вдоль стержня локального угла атаки и числа Рейнольдса в момент времени $t=0,8$ при $Fr=3$; $Re_0=100$; $\lambda=30$ и различных значениях отношения плотностей:
1 – $\gamma=0,2$; 2 – $\gamma=0,4$; 3 – $\gamma=0,6$; 4 – $\gamma=0,8$

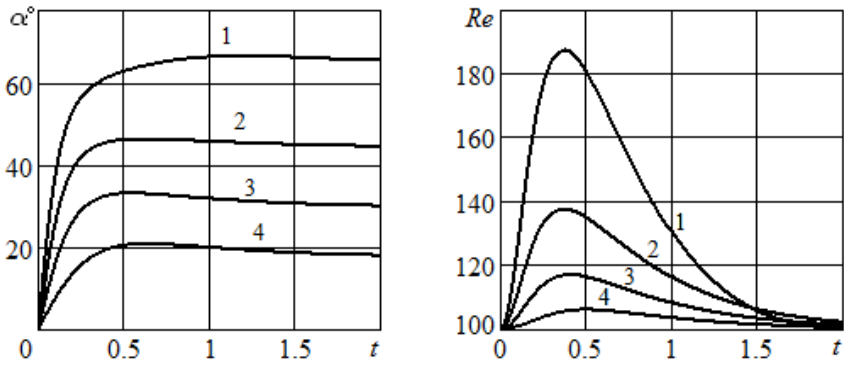


Рис. 12. Изменение по времени локального угла атаки и числа Рейнольдса при $\xi=0,8$; $Re_0=100$; $Fr=3$; $\lambda=30$ и различных значениях отношения плотностей: 1 – $\gamma=0,2$; 2 – $\gamma=0,4$; 3 – $\gamma=0,6$; 4 – $\gamma=0,8$

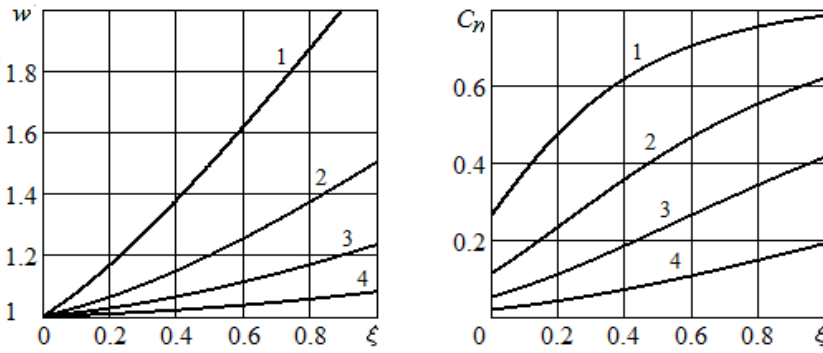


Рис. 13. Изменение вдоль стержня локальной относительной скорости и коэффициента гидродинамического сопротивления в момент времени $t=0,4$ при $Fr=3$; $Re_0=100$; $\lambda=30$ и различных отношениях плотностей: 1 – $\gamma=0,2$; 2 – $\gamma=0,4$; 3 – $\gamma=0,6$; 4 – $\gamma=0,8$

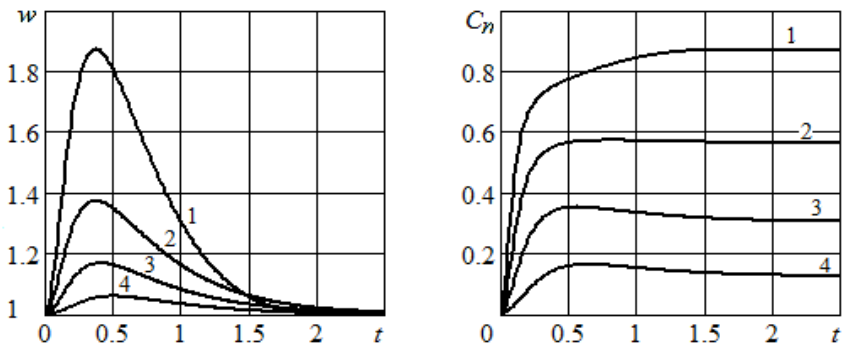


Рис. 14. Изменение по времени локальной относительной скорости и коэффициента гидродинамического сопротивления в точке $\xi=0,8$ при $Fr=3$; $Re_0=100$; $\lambda=30$ и различных отношениях плотностей: 1 – $\gamma=0,2$; 2 – $\gamma=0,4$; 3 – $\gamma=0,6$; 4 – $\gamma=0,8$



Влияние удлинения стержня показано на рисунках 15, 16. С увеличением λ максимум угловой скорости возрастает и сдвигается влево по оси времени. Изменение угла поворота стержня невелико. В положении равновесия при $\lambda=15$ угол $\Phi=61,0^\circ$; $\lambda=30$ — $\Phi=59,5^\circ$; $\lambda=60$ — $\Phi=58,5^\circ$; $\lambda=200$ — $\Phi=55,5^\circ$. При больших значениях λ наблюдаются меньшие локальные углы атаки и числа Рейнольдса вдоль оси стержня (рис. 16).

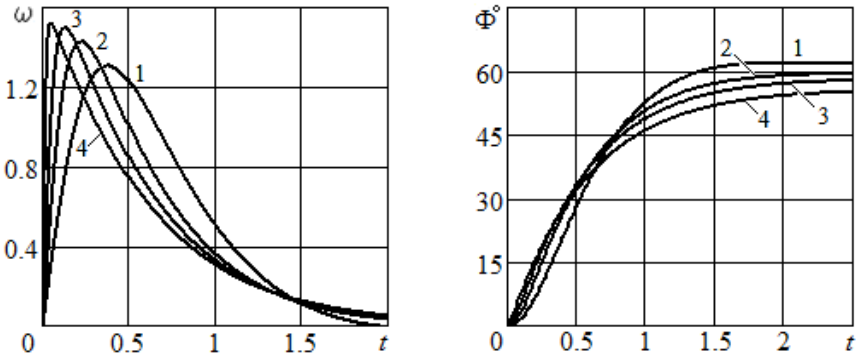


Рис. 15. Изменение по времени безразмерной угловой скорости и угла поворота стержня при $Re_0=100$; $Fr=1,5$; $\gamma=0,4$ и различных значениях удлинения:
1 — $\lambda=15$; 2 — $\lambda=30$; 3 — $\lambda=60$; 4 — $\lambda=200$

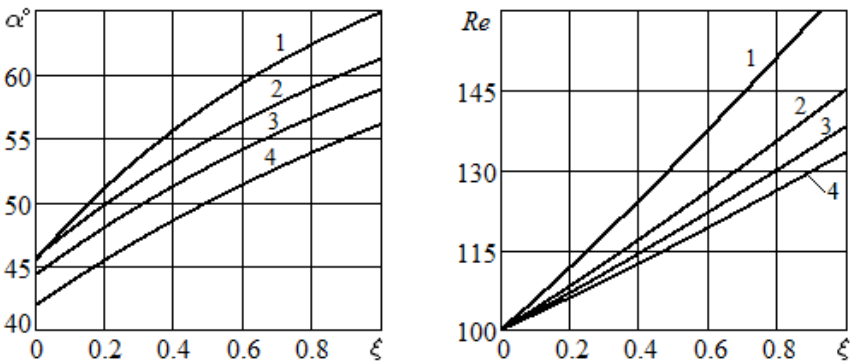


Рис. 16. Изменение вдоль стержня локального угла атаки и числа Рейнольдса в момент времени $t=0,8$ при $Re_0=100$; $Fr=1,5$; $\gamma=0,4$ и различных значениях удлинения:
1 — $\lambda=15$; 2 — $\lambda=30$; 3 — $\lambda=60$; 4 — $\lambda=200$

Таким образом, угол атаки равен углу между стержнем и вектором скорости потока только в равновесии. При движении стержня абсолютные скорости его точек растут вдоль оси. Это приводит к изменению направления и величины точек стержня относительно жидкости. В результате угол атаки меняется вдоль стержня, как и модуль относительной скорости. Именно по этим величинам следует рассчитывать силы гидродинамического сопротивления стержня, совершающего вращательное движение.

Анализ безразмерной системы уравнений динамики показал, что за критерии подобия задачи можно принять 4 безразмерных комплекса:



отношение плотности жидкости и стержня, число Фруда, число Рейнольдса, рассчитанное по скорости набегающего потока, удлинение стержня.

Список литературы

1. Светлицкий В. А. Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или газа. М., 1982.
2. Шаповалов В. М., Лапшина С. В. Пространственное движение стержня в вязкой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45, №1. С. 56–65.
3. Великанов Н. Л., Наумов В. А. Гидродинамическое сопротивление систем из стержней и нитей : монография. Калининград, 2015.
4. Кувишинов Г. Е., Наумов Л. А., Чупина К. В. Системы управления глубиной погружения буксируемых объектов. Владивосток, 2005.
5. Наумов В. А. Механика движения неоднородных сред : учебник. Калининград, 2005.
6. Корпачев В. П. Теоретические основы водного транспорта леса : монография. М., 2009.
7. Примак Л. В., Великанов Н. Л., Наумов В. А., Сапрыкин Ю. М. Расчетные схемы и технология ударного разрушения зданий и сооружений // Механизация строительства. 2009. №2. С. 14–16.
8. Розенштейн М. М., Недоступ А. А. Механика орудий рыболовства : учебник. М., 2012.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., 1974.
10. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. Ижевск, 2000.
11. Горлин С. М. Экспериментальная аэромеханика : учеб. пособие. М., 1970.
12. Наумов В. А. Прикладная математика : учеб. пособие по решению профессиональных задач в среде *Mathcad*. Калининград, 2014.

Об авторах

Николай Леонидович Великанов — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: NVelikanov@kantiana.ru

Владимир Аркадьевич Наумов — д-р техн. наук, проф., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: van-old@rambler.ru

Сергей Иванович Корягин — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

The authors

Prof. Nikolay L. Velikanov, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: NVelikanov@kantiana.ru

Prof. Vladimir A. Naumov, Kaliningrad State Technical University, Russia.

E-mail: van-old@rambler.ru

Prof. Sergey I. Koryagin, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru