РАЗНОЕ

УДК 514.75

О. О. Белова

НОРМАЛЬНАЯ ОБОБЩЕННАЯ АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ, АССОЦИИРОВАННАЯ С ГРАССМАНОПОДОБНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

В многомерном проективном пространстве рассмотрено грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей. В обобщенном расслоении задана нормальная аффинная связность, ассоциированная с многообразием. Поле объекта аффинной связности определяет тензорами кручения и кривизны, содержащие по одному простейшему и простому подтензору. Рассмотрен канонический случай нормальной обобщенной аффинной связности.

In projective space a Grassman-like manifold of centred planes is considered. The normal affine connection, associated with the manifold, is set in generalized fibering. Field of the affine connection object defines torsion and curvature tensors contained one elementary and one simple subtensor every. A canonical case of normal generalized affine connection is considered.

Ключевые слова: проективное пространство, грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей, нормальная обобщенная аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны.

Key words: projective space, Grassman-like manifold, normal generalized affine connection, torsion tensor, curvature tensor.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I, \ldots = 1, \ldots, n)$ с инфинитезимальными перемещениями $dA = \theta A + \omega^I A_I$, $dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A$, причем ω^I, ω_I, ω_J^I удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \; D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \; D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I.$$

В пространстве P_n рассмотрим грассманоподобное многообразие $Gr^*(m, n)$ центрированных m-мерных плоскостей L_m^*. Помещаем вершины A, A_a на плоскость L_m^* и фиксируем центр A (индексы принимают значения $a, \ldots = \overline{1, m}$; $\alpha, \ldots = \overline{m+1, n}$). Грассманоподобное многообразие $Gr^*(m, n)$ [1] центрированных плоскостей задается уравнениями $\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha$, где Λ_α^a, Λ_α^{ab} — некоторые функции; формы ω^α, ω_a^α — базисные формы данного многообразия; $\dim Gr^*(m, n) = (n-m)(m+1)$. Компоненты фундаментального объекта $\Lambda = \{\Lambda_\alpha^a, \Lambda_\alpha^{ab}\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω^α, ω_a^α:

$$\Delta\Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab}\omega_b + \omega_\alpha^a \equiv 0, \; \Delta\Lambda_\alpha^{ab} \equiv 0.$$

Замечание. Λ_α^{ab} образуют тензор, обращение которого в нуль выделяет особое подмногообразие многообразия $Gr^*(m, n)$. В нем центры m-мерных плоскостей лежат на $(n-m)$-мерной поверхности $\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha$.

Гладкое многообразие со структурными уравнениями

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + (\Lambda_\beta^a \omega^\beta + \Lambda_\beta^{ab} \omega_b^\beta) \wedge \omega_a^\alpha, \; D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge (\delta_a^b \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_a^b) - \omega^\alpha \wedge \omega_a,$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha - \omega^\gamma \wedge (\delta_\gamma^\alpha \omega_\beta + \delta_\beta^\alpha \omega_\gamma) - \delta_\beta^\alpha (\Lambda_\beta^a \omega^\beta + \Lambda_\beta^{ab} \omega_b^\beta) \wedge \omega_a - \omega_a^\alpha \wedge \omega_\beta^a$$

назовем *обобщенным расслоением* [2] нормальных аффинных реперов и обозначим $A_{h^2+[h]}(Gr^*(m, n))$, где $h = n - m$.

Для задания аффинной связности в обобщенном расслоении $A_{h^2+[h]}(Gr^*(m, n))$ распространим на него прием Лумисте задания групповых связностей в главных расслоениях. Преобразуем базисно-слоевые формы ω^α и слоевые формы ω^α_β расслоения $A_{h^2+[h]}(Gr^*(m,n))$ с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^α, ω^α_a:

$$\tilde\omega^\alpha = \omega^\alpha - L^\alpha_\beta\omega^\beta - M^{\alpha a}_\beta\omega^\beta_a,\ \ \tilde\omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma - \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\gamma_a. \tag{1}$$

Внешние дифференцируем (1), учтя структурные уравнения [1]:

$$\begin{aligned} D\tilde\omega^\alpha &= \tilde\omega^\beta\wedge\tilde\omega^\alpha_\beta + \omega^\beta\wedge(\Delta L^\alpha_\beta + M^{\alpha a}_\beta\omega_a) + \omega^\beta_a\wedge\Delta M^{\alpha a}_\beta + (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - L^\mu_\beta\Gamma^\alpha_{\mu\gamma})\omega^\beta\wedge\omega^\gamma + \\ &+ (\Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \Pi^{\alpha a}_{\mu\gamma}L^\mu_\beta + M^{\mu a}_\gamma\Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \delta^\alpha_\gamma\Lambda^a_\beta - L^\alpha_\gamma\Lambda^a_\beta)\omega^\beta\wedge\omega^\gamma_a + \\ &+ (-M^{\mu a}_\beta\Pi^{\alpha b}_{\mu\gamma} - \delta^\alpha_\beta\Lambda^{ab}_\gamma + L^\alpha_\beta\Lambda^{ab}_\gamma)\omega^\beta_a\wedge\omega^\gamma_b, \\ D\tilde\omega^\alpha_\beta &= \tilde\omega^\gamma_\beta\wedge\tilde\omega^\alpha_\gamma + \omega^\gamma\wedge(\Delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_a - \delta^\alpha_\beta\Lambda^a_\gamma\omega_a - \delta^\alpha_\beta\omega_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\omega_\beta) + \\ &+ \omega^\gamma_a\wedge(\Delta\Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\beta\Lambda^{ba}_\gamma\omega_b - \delta^\alpha_\gamma\omega^a_\beta) - \Gamma^\eta_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\eta\mu}\omega^\gamma\wedge\omega^\mu + \\ &+ (\Gamma^\alpha_{\eta\gamma}\Pi^{\eta a}_{\beta\mu} - \Pi^{\alpha a}_{\eta\mu}\Gamma^\eta_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Lambda^a_\gamma)\omega^\gamma\wedge\omega^\mu_a + (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Lambda^{ab}_\mu - \Pi^{\alpha b}_{\eta\mu}\Pi^{\eta a}_{\beta\gamma})\omega^\gamma_a\wedge\omega^\mu_b. \end{aligned} \tag{2}$$

Применим теорему Картана — Лаптева в обобщенном случае:

$$\begin{aligned} &\Delta L^\alpha_\beta + M^{\alpha a}_\beta\omega_a = L^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma + L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\gamma_a,\ \ \Delta M^{\alpha a}_\beta = M^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\gamma + M^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\omega^\gamma_b, \\ &\Delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_a - \delta^\alpha_\beta\Lambda^a_\gamma\omega_a - \delta^\alpha_\beta\omega_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\omega_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu_a, \\ &\Delta\Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\beta\Lambda^{ba}_\gamma\omega_b - \delta^\alpha_\gamma\omega^a_\beta = \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu + \Pi^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu_b. \end{aligned} \tag{3}$$

Утверждение 1. *Объект обобщенной аффинной связности* $\Gamma = \{L^\alpha_\beta,\ M^{\alpha a}_\beta, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$, *ассоциированной с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей, содержит простейший подтензор* $M^{\alpha a}_\beta$ *простого тензора связности* $L = \{L^\alpha_\beta,\ M^{\alpha a}_\beta\}$.

Подставим уравнения (3) в структурные уравнения (2):

$$\begin{aligned} D\tilde\omega^\alpha &= \tilde\omega^\beta\wedge\tilde\omega^\alpha_\beta + S^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta\wedge\omega^\gamma + S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\beta\wedge\omega^\gamma_a + S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\omega^\beta_a\wedge\omega^\gamma_b, \\ D\tilde\omega^\alpha_\beta &= \tilde\omega^\gamma_\beta\wedge\tilde\omega^\alpha_\gamma + R^\alpha_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma\wedge\omega^\mu + R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma\wedge\omega^\mu_a + R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma_a\wedge\omega^\mu_b, \end{aligned} \tag{4}$$

где компоненты объекта кручения $S = \{S^\alpha_{\beta\gamma},\ S^{\alpha a}_{\beta\gamma},\ S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\}$ нормальной аффинной связности выражаются по формулам

$$\begin{aligned} S^{\alpha a}_{\beta\gamma} &= \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma} + L^{\alpha a}_{\beta\gamma} - L^\mu_\beta\Pi^{\alpha a}_{\mu\gamma} + M^{\mu a}_\gamma\Gamma^\alpha_{\mu\beta} - M^{\alpha a}_{\gamma\beta} + \delta^\alpha_\gamma\Lambda^a_\beta - L^\alpha_\gamma\Lambda^a_\beta, \\ S^\alpha_{\beta\gamma} &= \Gamma^\alpha_{[\beta\gamma]} + L^\alpha_{[\beta\gamma]} - L^\mu_{[\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\gamma]},\ \ S^{\alpha ab}_{\beta\gamma} = M^\alpha\left[{}^{ab}_{\beta\gamma}\right] - M^\mu\left[{}^{a}_{\beta}\Pi^{\alpha b}_{\mu\gamma}\right] - \delta^\alpha_{\lfloor\beta}\Lambda^{\lceil a\ b}_{\ \ \gamma}\Big] + L^\alpha_{\lfloor\beta}\Lambda^{\lceil a\ b}_{\ \ \gamma}\Big], \end{aligned} \tag{5}$$

а компоненты объекта кривизны $R = \{R^\alpha_{\beta\gamma\mu},\ R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu},\ R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\}$ имеют вид

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\gamma\mu} &= \Gamma^\alpha_{\beta[\gamma\mu]} - \Gamma^\eta_{\beta[\gamma}\Gamma^\alpha_{\eta\mu]},\ \ R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} - \Pi^{\alpha a}_{\beta\mu\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Lambda^a_\gamma + \Gamma^\alpha_{\eta\gamma}\Pi^{\eta a}_{\beta\mu} - \Pi^{\alpha a}_{\eta\mu}\Gamma^\eta_{\beta\gamma}, \\ R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} &= \Pi^\alpha_\beta\left[{}^{ab}_{\gamma\mu}\right] - \Pi^\eta_\beta\left[{}^{a}_{\gamma}\Pi^{\alpha b}_{\eta\mu}\right] + \Gamma^\alpha_{\beta\lfloor\gamma}\Lambda^{\lceil a\ b}_{\ \ \mu}\Big]. \end{aligned} \tag{6}$$

Утверждение 2. *В уравнения (4) форм связности (1) входят компоненты объектов кручения и кривизны, выражаемые по формулам (5), (6).*

Продолжая уравнения (3) компонент объекта связности Γ, получим:

$$\begin{aligned} &\Delta L^\alpha_{\beta\gamma} + M^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_a + L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_a + L^\alpha_\gamma\omega_\beta - \delta^\alpha_\gamma L^\mu_\beta\omega_\mu \equiv 0,\ \ \Delta L^{\alpha a}_{\beta\gamma} + M^{\alpha ba}_{\beta\gamma}\omega_b + L^\alpha_\gamma\omega^a_\beta - \delta^\alpha_\gamma L^\mu_\beta\omega^a_\mu + M^{\alpha a}_\beta\omega_\gamma \equiv 0, \\ &\Delta M^{\alpha a}_{\beta\gamma} + M^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\omega_b - \delta^\alpha_\gamma M^{\mu a}_\beta\omega_\mu - M^{\alpha a}_\beta\omega_\gamma + M^{\alpha a}_\gamma\omega_\beta - M^{\alpha a}_\beta\Lambda^b_\gamma\omega_b - M^{\alpha b}_\beta\Lambda^a_\gamma\omega_b \equiv 0, \\ &\Delta M^{\alpha ab}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\gamma M^{\mu a}_\beta\omega^b_\mu + M^{\alpha b}_\beta\omega^a_\gamma + M^{\alpha a}_\gamma\omega^b_\beta - M^{\alpha a}_\beta\Lambda^{cb}_\gamma\omega_c - M^{\alpha c}_\beta\Lambda^{ab}_\gamma\omega_c \equiv 0, \\ &\Delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma\mu} + \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega_a + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega_a + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\omega_\gamma + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}\omega_\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\omega_\mu - \delta^\alpha_\mu\Gamma^\eta_{\beta\gamma}\omega_\eta + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Lambda^a_\mu\omega_a - \delta^\alpha_\beta\Lambda^a_{\gamma\mu}\omega_a + \ldots \equiv 0, \\ &\Delta\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} + \Pi^{\alpha ba}_{\beta\gamma\mu}\omega_b + \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_\mu + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\omega^a_\gamma + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}\omega^a_\beta - \delta^\alpha_\mu\Gamma^\eta_{\beta\gamma}\omega^a_\eta - \delta^\alpha_\beta\Lambda^a_\gamma\omega_\mu + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Lambda^{ba}_\mu\omega_b + \delta^\alpha_\beta\Lambda^{ba}_{\gamma\mu}\omega_b + \ldots \equiv 0, \\ &\Delta\Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} + \Pi^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega_b + \Pi^{\alpha a}_{\beta\mu}\omega_\gamma + \Pi^{\alpha a}_{\mu\gamma}\omega_\beta - \delta^\alpha_\mu\Pi^{\eta a}_{\beta\gamma}\omega_\eta + \delta^\alpha_\gamma\Lambda^a_\mu\omega_\beta - \Pi^{\alpha b}_{\beta\gamma}\Lambda^a_\mu\omega_b - \delta^\alpha_\beta\overline{\Lambda}^{ba}_{\gamma\mu}\omega_b + \ldots \equiv 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\Delta\Pi^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}+\Pi^{\alpha b}_{\beta\gamma}\omega^{a}_{\mu}+\Pi^{\alpha a}_{\beta\mu}\omega^{b}_{\gamma}+\Pi^{\alpha a}_{\mu\gamma}\omega^{b}_{\beta}-\delta^{\alpha}_{\mu}\Pi^{\eta a}_{\beta\gamma}\omega^{b}_{\eta}-\delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{ba}_{\gamma}\omega_{\mu}+\delta^{\alpha}_{\gamma}\Lambda^{ab}_{\mu}\omega_{\beta}-\Pi^{\alpha c}_{\beta\gamma}\Lambda^{ab}_{\mu}\omega_{c}-\delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{cab}_{\gamma\mu}\omega_{c}+\ldots\equiv 0.$$

Здесь многоточие означает наличие слагаемых, которые различаются в зависимости от способов группировки (см. [3]).

Пользуясь формулами (5) и (6), находим дифференциальные сравнения, которым удовлетворяют компоненты этих объектов:

$$\Delta S^{\alpha}_{\beta\gamma}+S^{\alpha a}_{[\beta\gamma]}\omega_{a}\equiv 0,\ \Delta S^{\alpha a}_{\beta\gamma}+2S^{\alpha ba}_{\beta\gamma}\omega_{b}\equiv 0,\ \Delta S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\equiv 0;$$

$$\Delta R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}+R^{\alpha a}_{\beta[\gamma\mu]}\omega_{a}\equiv 0,\ \Delta R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}+2R^{\alpha ba}_{\beta\gamma\mu}\omega_{b}\equiv 0,\ \Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\equiv 0.$$

Теорема 1. *Для грассманоподобного многообразия $Gr^{*}(m,n)$ центрированных плоскостей объекты кручения S и кривизны R нормальной обобщенной аффинной связности являются тензорами, содержащими простейшие $S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}$, $R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}$ и простые $\{S^{\alpha a}_{\beta\gamma}, S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\}$, $\{R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}, R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\}$ подтензоры [4].*

Утверждение 3. *Дифференциальные сравнения для подтензоров кручения S и кривизны R соответствуют между собой.*

Рассмотрим канонический случай нормальной аффинной связности, когда тензор связности L обращается в нуль. В этом случае $\tilde{\omega}^{\alpha}=\omega^{\alpha}$, то есть преобразование базисно-слоевых форм ω^{α} не производится, объект связности упрощается: $\overset{0}{\Gamma}=\{0,\ 0,\ \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma},\ \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$. Учтем $L^{a}_{\beta}=0$, $M^{\alpha a}_{\beta}=0$ в выражениях (5):

$$S^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{[\beta\gamma]},\ S^{\alpha a}_{\beta\gamma}=\Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma}+\delta^{\alpha}_{\gamma}\Lambda^{a}_{\beta},\ S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}=-\delta^{\alpha}_{[\beta}\Lambda^{\lceil a\ b}_{\ \ \gamma\rfloor}. \qquad (8)$$

Теорема 2. *В каноническом случае тензор кручения нормальной аффинной связности содержит компоненты: $S^{\alpha}_{\beta\gamma}$, равные альтернации по нижним индексам аналогичных компонент объекта связности; $S^{\alpha a}_{\beta\gamma}$, равные сумме соответствующих компонент объекта связности и произведений компонент символа Кронекера на компоненты подобъекта Λ^{a}_{α} фундаментального объекта Λ; $S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}$, равные альтернированным по парам индексов произведениям компонент символа Кронекера и компонент фундаментального подобъекта Λ^{ab}_{α}.*

При $\Lambda^{ab}_{\alpha}=0$ выражения ($8_{1,2}$) компонент тензора кручения останутся прежними, а (8_{3}) примут вид $S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}=0$.

Замечание. Для особого подмногообразия грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей в каноническом случае тензор кручения нормальной аффинной связности содержит нулевые компоненты $S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}$.

Список литературы

1. *Белова О. О.* Связность в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Чебоксары, 2006. С. 18—20.

2. *Шевченко Ю. И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

3. *Белова О. О.* Тензор кривизны связности в расслоении над грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2009. Вып. 40. С. 18—28.

4. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

Об авторе

Ольга Олеговна Белова — канд. физ.-мат. наук, доц., РГУ им. И. Канта, e-mail: olgaobelova@mail.ru

Author

Dr Olga Belova — assistant professor, IKSUR, e-mail: olgaobelova@mail.ru