УДК 514.76

К. В. Полякова[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

polyakova@mail.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9935-0232

doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-13

Нормали на многообразии и порождающие их отображения

Рассматриваются канонические формы 1-го и 2-го порядков на гладком многообразии. Реализуется подход, связанный с координатным выражением базисных и слоевых форм на многообразии, а также векторов реперов в слоях (касательных векторов 1-го и 2-го порядков). Показано, что базисные касательные векторы 1-го и 2-го порядков являются операторами пфаффовых (обобщенных) дифференцирований 1-го и 2-го порядков функций, заданных на многообразии. Рассмотрены нормали на многообразии. Построены отображения из множества касательных векторов 1-го порядка во множество векторов нормали 2-го, а также 3-го порядка. Построены отображения, порождающие горизонтальные векторы для простейшей аффинной связности 2-го порядка.

Ключевые слова: дифференциальные формы, касательное пространство 2-го порядка, пфаффовы (обобщенные) производные, нормали на многообразии, аффинные связности.

1. Структурные уравнения и деривационные формулы. Каноническая форма 1-го порядка $\theta = \omega^i \varepsilon_i$ $(i, j, k = \overline{1, m})$ на m-мерном многообразии X_m связывает касательное $TX_m = span(\varepsilon_i)$ и

Поступила в редакцию 23.05.2019 г.

кокасательное $T^*X_m = span(\omega^i)$ пространства к этому многообразию в его текущей точке *M*, а также соответствует тождественным преобразованиям этих пространств, то есть

$$\theta = id_{TX_m}, \ \theta = id_{T^*X_m}.$$

Дифференциальные 1-формы ω^i образуют кобазис, сопряженный к подвижному (неголономному) базису $\{\varepsilon_i\}$, то есть $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$. Каноническая форма является тензорнозначной (см. [2; 4, с. 104]), точнее, тангенциальнозначной. Хотя фактически $\theta = \omega^i \otimes \varepsilon_i \in T^*X_m \otimes TX_m$, но значок тензорного умножения в форме $\theta = \omega^i \varepsilon_i$ будем опускать.

Реализуем подход, связанный с координатным выражением базисных и слоевых форм, а также векторов реперов в слоях. Рассмотрим некоторую окрестность многообразия X_m, в которой текущая точка определяется локальными координатами x^i. Слоевые координаты [6, с. 149] x^i_j, x^i_{jk}, x^i_{jkl} на многообразии X_m удовлетворяют соотношениям $\det(x^i_j) \neq 0$, $\overset{*}{x}{}^i_j x^j_k = \delta^i_k$, $x^i_j \overset{*}{x}{}^j_k = \delta^i_k$ и симметричны по нижним индексам. При этом базисные ω^i и слоевые ω^i_j, ω^i_{jk} формы имеют вид

$$\omega^i = x^i_j dx^j, \quad \omega^i_j = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - x^i_{jk}\omega^k,$$

$$\omega^i_{jk} = dx^i_{jk} + x^l_{jk}\omega^i_l - x^i_{lk}\omega^l_j - x^i_{jl}\omega^l_k + (x^s_{jk}x^i_{sl} - x^i_{jkl})\omega^l. \qquad (1)$$

Структурные уравнения совокупности базисных ω^i и слоевых $\omega^i_j, \omega^i_{jk}$ форм главного расслоения реперов 2-го порядка, построенного над многообразием X_m, находятся внешним дифференцированием форм (1) (см. [6]).

Относительно натурального (голономного) репера $\{\partial_i = \partial / \partial x^i,\ \partial_{ij} = \partial^2 / \partial x^i \partial x^j\}$ векторы ε_i, ε_{ij} раскладываются по формулам [7]

$$\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}_i^j \partial_j, \quad \varepsilon_{ij} = \overset{*}{x}{}_i^k \overset{*}{x}{}_j^l \partial_{kl} + x_{ij}^k \overset{*}{x}{}_k^l \partial_l. \qquad (2)$$

Слоевые формы интерпретируются как компоненты инфинитезимального перемещения векторного репера ε_i, ε_{ij}, удовлетворяющего деривационным уравнениям

$$d\varepsilon_i = \omega^j \varepsilon_{ij} + \omega_i^j \varepsilon_j, \quad d\varepsilon_{ij} = \omega_i^k \varepsilon_{kj} + \omega_j^k \varepsilon_{ik} + \omega_{ij}^k \varepsilon_k + \omega^k \varepsilon_{ijk}, \quad (3)$$

которые получены дифференцированием векторов (2).

Пространство $T^2 X_m = span(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij})$ в текущей точке M многообразия называется касательным пространством порядка 2, а также соприкасающимся пространством порядка 1 [10];

$$dim T^2 X_m = \tfrac{1}{2} m(m+3).$$

2. Кокасательное пространство 2-го порядка гладкого многообразия. Операции внешнего дифференцирования и внешнего умножения, примененные к дифференциальным 1-формам, приводят к дифференциальным 2-формам, то есть формам степени 2. Операции обычного дифференцирования и умножения (определенного, например, в [14, с. 8]), примененные к дифференциальным 1-формам, приводят к формам второго порядка. Пространства форм степени 1 и порядка 1 суть одно и то же, тогда как пространства форм степени 2 и порядка 2 уже не совпадают.

При умножении внешним образом двух 1-форм пространства $T^* X_m$, а также при дифференцировании внешним образом 1-формы пространства $T^* X_m$, коэффициенты которой зависят от координат x^i точки многообразия, получаются 2-формы пространства $\wedge^2 T^* X_m$. Однако в общем случае при внешнем дифференцировании не получается форма пространства $\wedge^2 T^* X_m$, например $D\omega^i = dx^i_j \wedge dx^j \in T^* LX_m$.

Дифференцируя каноническую форму θ обычным образом, получим (см. [1, с. 28; 12]) каноническую форму 2-го порядка

$$d\theta = (d\omega^i + \omega^j \omega^i_j)\varepsilon_i + \omega^i \omega^j \varepsilon_{ij},$$

причем $d\theta \in (T^2 X_m)^* \otimes T^2 X_m$; $d\omega^i + \omega^k \omega^i_k$, $\omega^i \omega^j \in (T^2 X_m)^*$, $\varepsilon_{ij} \in T^2 X_m$. Пространство $(T^2 X_m)^*$ является сопряженным касательному пространству 2-го порядка $T^2 X_m$ и называется кокасательным пространством 2-го порядка.

На формах из пространства $T^* X_m \otimes TX_m$ обычный дифференциал действует по закону

$$d:\ \omega \in T^* X_m \otimes TX_m \to$$

$$\to\ d\omega = \varepsilon_i d\omega^i + \omega^i d\varepsilon_i \in (T^2 X_m)^* \otimes T^2 X_m .$$

В этом случае увеличивается как порядок кокасательного пространства, так и порядок касательного пространства.

Условия сопряженности для произвольных (неголономных, то есть не являющихся натуральными) базиса и кобазиса 2-го порядка имеют вид:

$$(d\omega^i + \omega^k \omega^i_k)(\varepsilon_j) = \delta^i_j, \quad (d\omega^i + \omega^j \omega^i_j)(\varepsilon_{kl}) = 0,$$

$$(\omega^i \omega^j)(\varepsilon_{kl}) = \frac{1}{2}(\delta^i_k \delta^j_l + \delta^i_l \delta^j_k), \ (\omega^i \omega^j)(\varepsilon_k) = 0. \tag{4}$$

Тогда $d\theta(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$, то есть $d\theta = id_{TX_m}$, кроме того $d\theta(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{ij}$, то есть $d\theta = id_{T^2 X_m}$. Форма 2-го порядка $d\theta$ соответствует тождественному преобразованию касательного пространства 2-го порядка $T^2 X_m$ и его подпространства TX_m.

Действуя формой $d\theta$ на ковекторы 1-го и 2-го порядка $\overset{1}{\omega} = a_i\omega^i$, $\overset{2}{\omega} = a_i(d\omega^i + \omega^j\omega_j^i) + a_{ij}\omega^i\omega^j$, получим

$$d\theta(\overset{1}{\omega}) = a_i(d\omega^i + \omega^j\omega_j^i) \neq \overset{1}{\omega},$$

$$d\theta(\overset{2}{\omega}) = a_i(d\omega^i + \omega^j\omega_j^i) + a_{ij}\omega^i\omega^j = \overset{2}{\omega}.$$

Видим, что она соответствует тождественному преобразованию кокасательного пространства 2-го порядка $(T^2X_m)^*$, то есть $d\theta = id_{(T^2X_m)^*}$.

Каноническая форма 2-го порядка связывает касательное T^2X_m и кокасательное $(T^2X_m)^*$ пространства 2-го порядка к многообразию X_m и соответствует тождественным преобразованиям этих пространств.

Векторнозначные формы 2-го порядка действуют как в пространстве векторов 2-го порядка, так и в пространстве ковекторов 2-го порядка. В случае тензорнозначной формы $\Omega = e\omega \in (T^rX_m)^* \otimes T^pX_m$ имеем

$$\Omega = e\omega:\ u \in T^rX_m \ \to\ \Omega(u) = e \cdot \omega(u) \in T^pX_m,$$

$$\Omega = \omega e:\ \theta \in (T^pX_m)^* \to \Omega(\theta) = \omega \cdot e(\theta) = \omega \cdot \theta(e) \in (T^rX_m)^*.$$

Замечание. Выражение обычного дифференциала канонической формы θ многообразия относительно натуральных репера и корепера принимает вид: $d\theta = d^2x^i\partial_i + dx^idx^j\partial_{ij}$. Операторы $\{\partial_i, \partial_{ij}\}$ образуют натуральный корепер касательного пространства 2-го порядка T^2X_m; дифференциалы $\{d^2x^i, dx^idx^j\}$

образуют натуральный корепер кокасательного пространства 2-го порядка $(T^2X_m)^*$ (см. [3, с. 175; 13; 14]. Ненулевые условия сопряженности имеют вид

$$dx^i dx^j(\partial_{kl}) = \frac{1}{2}(\delta^i_k\delta^j_l + \delta^i_l\delta^j_k),\ d^2x^i(\partial_j) = \delta^i_j.$$

Справедливы включения

$$TX_m \subset T^2X_m \text{ и } \{\partial_i\} \in \{\partial_i, \partial_{ij}\},$$

$$T^*X_m \not\subset (T^2X_m)^* \text{ и } \{dx^i\} \notin \{d^2x^i, dx^i dx^j\}.$$

3. Пфаффовы (неголономные) производные 1-го и 2-го порядков для функции на гладком многообразии. Пусть на многообразии X_m задана скалярная функция $f = f(x^i)$. Ее дифференциал df определяет в двойственном касательном пространстве T^*X_m поле ковектора $df = f_i\ \omega^i$, где величины $f_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j f$ являются частными производными по отношению к кореперу $\{\omega^i\}$ и называются *пфаффовыми производными функции* f [5, с. 67], а также *обобщенными частными производными*. Поскольку они возникают в неголономном корепере ω^i, то их можно называть *неголономными производными*.

Пфаффовы производные f_i функции f удовлетворяют уравнениям [7]

$$df_i - f_j\ \omega^j_i = f_{ij}\omega^j \quad (f_{ij} = f_{ji}),$$

где $f_{ij} = \overset{*}{x}{}^k_i \overset{*}{x}{}^l_j \partial_{kl} f + x^k_{ij} f_k$ — *пфаффовы (неголономные) производные 2-го порядка.*

Обобщая известную для функции f и вектора v формулу $\partial_v f = df(v)$, получим лемму.

Лемма 1. *Касательные векторы 1-го* ε_i *и 2-го* ε_{ij} *порядков являются операторами пфаффовых дифференцирований функций* $f = f(x^i)$*, заданных на многообразии* X_m*, то есть справедливо*

$$\varepsilon_i(f) = df(\varepsilon_i)\,,\quad \varepsilon_{ij}(f) = d^2 f(\varepsilon_{ij})\,,$$

где d^2 *— дифференциал второго порядка, при этом справедливы обозначения* $\varepsilon_i(f) = \partial_{\varepsilon_i} f = f_i$, $\varepsilon_{ij}(f) = \partial_{\varepsilon_{ij}} f = f_{ij}$.

Действительно, рассматривая действие дифференциала df на базисных векторах ε_i, получим $df(\varepsilon_i) = f_i$. Для вычисления дифференциала второго порядка [3, с. 175] $d^2 f$ продифференцируем выражение $df = f_i\,\omega^i$:

$$d^2 f = d(f_i\,\omega^i) = df_i\,\omega^i + f_i\,d\omega^i = d(\overset{*}{x}{}^j_i\,\partial_j f)\,\omega^i + f_i\,d\omega^i =$$
$$= (d\omega^l + \omega^s\omega^l_s + x^l_{st}\omega^s\omega^t) f_l + \overset{*}{x}{}^k_s \overset{*}{x}{}^l_t \partial^2_{kl} f \omega^s\omega^t.$$

Тогда получим

$$d^2 f(\varepsilon_{ij}) = ((d\omega^l + \omega^s\omega^l_s)(\varepsilon_{ij}) + x^l_{st}(\omega^s\omega^t)(\varepsilon_{ij})) f_l +$$
$$+ \overset{*}{x}{}^k_s \overset{*}{x}{}^l_t \partial^2_{kl}(\omega^s\omega^t)(\varepsilon_{ij}),$$

откуда с помощью условий сопряженности векторов и форм 2-го порядка (4) следует $d^2 f(\varepsilon_{ij}) = f_{ij}$.

Если в равенстве $\varepsilon_i(f) = df(\varepsilon_i)$ заменить функцию f векторами ε_j, то будет иметь место следующая лемма.

Лемма 2. *Для касательных векторов 1-го порядка* ε_i, ε_j *справедливо равенство* $\varepsilon_i(\varepsilon_j) = d\varepsilon_j(\varepsilon_i)$.

Действительно, при линейном отображении $d\varepsilon_i$, определяемом соотношением (3), имеем $d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \dot{\varepsilon}_{ij}$. Кроме того,

$$\partial_{\varepsilon_j}\varepsilon_i = \partial_{\overset{*}{x}{}^l_j \partial_l}(\overset{*}{x}{}^k_i \partial_k) = \overset{*}{x}{}^l_j \partial_l(\overset{*}{x}{}^k_i \partial_k) = \overset{*}{x}{}^k_i \overset{*}{x}{}^l_j \partial_{kl} = \varepsilon_{ij} - x^k_{ij}\varepsilon_k = \dot{\varepsilon}_{ij}.$$

Векторы $\dot{\varepsilon}_{ij}$ удовлетворяют уравнениям $\Delta\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ijk}\omega^k$, то есть инвариантны в совокупности, причем

$$\dot{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk} - x^l_{ijk}\varepsilon_l - x^l_{ij}\dot{\varepsilon}_{lk},,$$

где векторы

$$\varepsilon_{ijk} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^s_j \overset{*}{x}{}^t_k \partial_{lst} + x^l_{ijk}\varepsilon_l + (\overset{*}{x}{}^p_l \overset{*}{x}{}^q_j x^l_{ik} + \overset{*}{x}{}^p_i \overset{*}{x}{}^q_l x^l_{jk} + \overset{*}{x}{}^p_l \overset{*}{x}{}^q_k x^l_{ij})\partial_{pq}$$

принадлежат касательному пространству 3-го порядка T^3X_m.

4. Нормали на гладком многообразии. В [10] нормалью (обобщенной нормалью [11]) порядка *r* в точке *M* многообразия называется такое подпространство N^r соприкасающегося пространства O^rX_m, которое имеет пересечение нулевой размерности с пространством O^{r-1} и размерность которого является дополнительной по отношению к размерности $O^{r-1}X_m$, то есть $N^r \oplus O^{r-1}X_m = O^rX_m$.

Для определения порядка нормали будем использовать порядки касательных, а не соприкасающихся пространств, полагая, что соприкасающееся пространство *r*-го порядка — это касательное пространство $(r+1)$-го порядка, то есть $T^{r+1}X_m = O^rX_m$. Кроме того, в качестве нормалей будем рассматривать также пространства, дополняющие TX_m (а не только пространство T^rX_m) до пространства $T^{r+1}X_m$.

Нормалью порядка r пространства TX_m (многообразия X_m) в точке M будем называть подпространство N_1^r, дополняющее пространство TX_m до пространства T^rX_m, то есть $N_1^r \oplus TX_m = T^rX_m$. В частности, для пространства TX_m имеем нормаль N_1^2: $N_1^2 \oplus TX_m = T^2X_m$ и нормаль N_1^3: $N_1^3 \oplus TX_m = T^3X_m$. Эти нормали можно представить в виде

$$N_1^2 = T^2X_m \setminus TX_m, \; N_1^3 = T^3X_m \setminus TX_m .$$

Нормалью порядка $r+1$ *пространства* T^rX_m в точке M будем называть подпространство N_r^{r+1}, дополняющее пространство T^rX_m до пространства $T^{r+1}X_m$, то есть $N_r^{r+1} \oplus T^rX_m = T^{r+1}X_m$ [10]. Например, для пространства T^2X_m имеем нормаль $N_2^3 = T^3X_m \setminus T^2X_m$.

Теорема. *Пусть* $u: X_m \to TX_m$ *— векторное поле, тогда* $du: TX_m \to T^2X_m$ *— линейное отображение из касательного пространства 1-го порядка в касательное пространство 2-го порядка. Причем для базисных касательных векторов* $\varepsilon_i : X_m \to TX_m$ *линейное отображение* $d\varepsilon_i$: $\mathrm{TX_m} \to N_1^2 = T^2X_m \setminus TX_m$ *поднимает касательный вектор 1-го порядка в нормаль 2-го порядка* N_1^2; причем $d\varepsilon_i$: $\varepsilon_j \in \mathrm{TX_m} \to \dot{\varepsilon}_{ij} \in N_1^2 = span(\dot{\varepsilon}_{ij})$.

Отображение $d\varepsilon_i$ всем касательным векторам ставит в соответствие векторы нормали 2-го порядка. Такое расщепление соприкасающегося пространства определяет простейшую [8] (каноническую) аффинную связность $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$ с формами $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^i_j = \omega^i_j\big|_{\omega^l=0}$. Эта связность является плоской и симметричной. Векторы $\overset{0}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ являются горизонтальными векторами для простейшей связности 1-го порядка, а нормаль N_1^2 — горизонтальным подпространством этой связности, то есть $H\,T^2 X_m = N^2$ [10; 12].

Замечание. Размерности расслоений $T(T^2 X_m)$, $T^2(TX_m)$, $T^3 X_m$ не равны между собой:

$$\dim T(T^2 X_m) = m(m+5)\,,$$

$$\dim T^2(TX_m) = m(m+5) + m^2\,,$$

$$\dim T^3 X_m = \tfrac{1}{6} m(m^2 + 6m + 17)\,.$$

5. Нормали 3-го порядка. Обобщением леммы 2, справедливой для базисных касательных векторов 1-го порядка, на случай базисных касательных векторов 2-го порядка является следующая лемма.

Лемма 3. *Для базисных касательных векторов 1-го и 2-го порядка $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon' = \{\varepsilon_{ij}\}$ справедливы равенства*

$$\partial_{\varepsilon}\varepsilon' = d\varepsilon'(\varepsilon)\,, \quad \partial_{\varepsilon'}\varepsilon = d^2\varepsilon(\varepsilon')\,, \quad \partial_{\varepsilon'}\varepsilon' = d^2\varepsilon'(\varepsilon')\,,$$

то есть производные одних базисных векторов по направлению других базисных векторов равны значениям дифференциалов первых векторов на вторых векторах, причем порядок дифференциалов равен порядку векторов, вдоль которых производится дифференцирование.

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_i}\varepsilon_{pq}$ или действуя линейным отображением $d\varepsilon_{pq}$ на касательные векторы ε_i, соответственно получим равные выражения

$$\partial_{\varepsilon_i}\varepsilon_{pq} = \overset{*}{x}{}^j_p \overset{*}{x}{}^k_q \overset{*}{x}{}^l_i \partial_{jkl} + x^j_{pq} \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{kl}\,,$$

$$d\varepsilon_{pq}(\varepsilon_i)=\varepsilon_{pqi}-\varepsilon_j x^j_{pqi}-\dot{\varepsilon}_{jq}x^j_{pi}-\dot{\varepsilon}_{pj}x^j_{qi},$$

которые обозначим $\partial_{\varepsilon_i}\varepsilon_{pq}=d\varepsilon_{pq}(\varepsilon_i)=\varepsilon_{pq,i}$.

Второй дифференциал касательных векторов ε_i, то есть обычный дифференциал деривационной формулы (3_1), имеет вид

$$d^2\varepsilon_i=\varepsilon_{ijk}\omega^j\omega^k+\varepsilon_{ij}\left(d\omega^j+\omega^j_k\omega^k\right)+2\varepsilon_{jk}\omega^k\omega^j_i+$$
$$+\varepsilon_j\left(d\omega^j_i+\omega^j_k\omega^k_i+\omega^k\omega^j_{ik}\right).$$

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_{pq}}\varepsilon_i$ или действуя линейным отображением $d^2\varepsilon_i$ на соприкасающиеся векторы ε_{pq}, соответственно получим равные выражения

$$\partial_{\varepsilon_{pq}}\varepsilon_i=\overset{*}{x}{}^j_p\overset{*}{x}{}^k_q\overset{*}{x}{}^l_i\partial_{ljk}+x^j_{pq}\overset{*}{x}{}^l_i\overset{*}{x}{}^k_j\partial_{lk},$$

$$d^2\varepsilon_i(\varepsilon_{pq})=\varepsilon_{ipq}-\varepsilon_j x^j_{ipq}-\dot{\varepsilon}_{jq}x^j_{ip}-\dot{\varepsilon}_{jp}x^j_{iq},$$

которые обозначим $\partial_{\varepsilon_{pq}}\varepsilon_i=d^2\varepsilon_i(\varepsilon_{pq})=\varepsilon_{i,pq}$.

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_{pq}}\varepsilon_{ij}$ или действуя линейным отображением $d^2\varepsilon_{ij}$ на соприкасающиеся векторы ε_{pq}, соответственно получим равные выражения.

Для векторов $\varepsilon_{pq,i},\varepsilon_{i,pq}$ справедливо $\varepsilon_{pq,i}=\varepsilon_{i,pq}$, причем $\Delta\varepsilon_{pq,i}\equiv\omega^j_{pq}\dot{\varepsilon}_{ji}$. Таким образом, векторы $\dot{\varepsilon}_{ji}$, $\varepsilon_{pq,i}$ инвариантны в совокупности и определяют нормаль 3-го порядка $N^3_1=T^3X_m\setminus TX_m$ пространства TX_m, то есть

$$N^3_1=span(\dot{\varepsilon}_{ji},\ \varepsilon_{pq,l}).$$

Векторы $\dot{\varepsilon}_{ij,k} = \varepsilon_{ij,k} - x_{ij}^l \dot{\varepsilon}_{kl}$ инвариантны в совокупности, причем для отображения, определяемого векторами нормали 2-го порядка, имеем

$$d\dot{\varepsilon}_{ij} : \varepsilon_k \in TX_m \to d\dot{\varepsilon}_{ij}(\varepsilon_k) = \dot{\varepsilon}_{i,jk} = \dot{\varepsilon}_{ij,k} \in N_2^3 = T^3 X_m \setminus T^2 X_m .$$

Теорема. *Пусть* $U : X_m \to T^2 X_m$ *— векторное поле 2-го порядка, тогда* $dU : TX_m \to T^3 X_m$ *— линейное отображение из касательного пространства 1-го порядка в касательное пространство 3-го порядка. Причем для базисных векторов* $\dot{\varepsilon}_{ij} : X_m \to N^2 \subset T^2 X_m$ *нормали 2-го порядка линейное отображение* $d\dot{\varepsilon}_{ij} : TX_m \to N_2^3 \subset T^3 X_m$ *поднимает касательный вектор в нормаль 3-го порядка* N_2^3.

Обобщая данный результат, можно утверждать, что отображения, задаваемые дифференциалами базисных векторов нормали N_{r-1}^r, переводят базисные касательные векторы 1-го порядка в базисные векторы нормали N_r^{r+1}.

Векторы $\dot{\varepsilon}_{ji}$, $\varepsilon_{pq,i} = \varepsilon_{i,pq}$ являются горизонтальными векторами для простейшей связности 2-го порядка [8; 9]. Тензоры кривизны и кручения 2-го порядка в этой связности равны нулю. Действительно, горизонтальные векторы 3-го порядка $\widetilde{\varepsilon}_{ijk}$

$$\widetilde{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{lj} \Gamma_{ik}^l + \varepsilon_{il} \Gamma_{jk}^l + \varepsilon_l L_{ijk}^l \quad (\widetilde{\varepsilon}_{ijk} \in T^3 X_m)$$

для простейшей аффинной связности 2-го порядка $\overset{0}{\Gamma}{}^2$ с компонентами $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$, $\overset{00}{L}{}^i_{jkl} = -x^i_{jkl} + x^i_{sk} x^s_{jl} + x^i_{js} x^s_{kl}$ имеют вид $\overset{0}{\widetilde{\varepsilon}}_{ijk} = \varepsilon_{i,jk}$. Формы $\overset{0}{\widetilde{\omega}}{}^i_{jk} = \omega^i_{jk}\big|_{\omega^l = 0}$, $\overset{0}{\widetilde{\omega}}{}^i_j = \omega^i_j\big|_{\omega^l = 0}$ являются формами простейшей связности 2-го порядка.

Для горизонтальных векторов простейшей связности 2-го порядка $\overset{0}{\Gamma}{}^{2}$ справедливо разложение

$$\overset{0}{\tilde{\varepsilon}}_{ijk} = \dot{\varepsilon}_{ij,k} + x^{l}_{jk}\dot{\varepsilon}_{li}, \quad \overset{0}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$$

по базисным векторам $\dot{\varepsilon}_{ij} \in N_1^2$ и $\dot{\varepsilon}_{ij,k} \in N_2^3$.

Список литературы

1. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.

2. *Бабурова О.В., Фролов Б.Н.* Математические основы современной теории гравитации. М., 2012.

3. *Веблен О., Уайтхед Дж.* Основания дифференциальной геометрии. М., 1949.

4. *Восилюс Р.В.* Контравариантная теория дифференциального продолжения в модели пространства со связностью // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. 1983. Т. 14. С. 101—176.

5. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

6. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

7. *Полякова К.В.* Двойственные методы исследования дифференциально-геометрических структур // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2014. Вып. 45. С. 92—104.

8. *Полякова К.В.* Специальные аффинные связности 1-го и 2-го порядков // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 114—128.

9. *Полякова К.В.* О задании аффинной связности 2-го порядка векторнозначными формами 1-го, 2-го и 3-го порядков // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 108—125.

10. *Рыбников А.К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т. 29, вып. 2. С. 279—290.

11. *Рыбников А.К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Матем. заметки. 1983. №1. С. 73—80.

12. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

13. *Catuogno P.* A geometric Itô formula // Matemática Contemporânea. 2005. Vol. 33. P. 85—99.

14. *Emery M.* An Invitation to second-order stochastic differential geometry. 2007. URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00145073 (дата обращения: 20.04.2019).

K. Polyakova[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*

14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia

polyakova_@mail.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9935-0232

doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-13

Maps generating normals on a manifold

Submitted on May 23, 2019

The first- and second-order canonical forms are considered on a smooth m-manifold. The approach connected with coordinate expressions of basic and fiber forms, and first- and second-order tangent vectors on a manifold is implemented. It is shown that the basic first- and second-order tangent vectors are first- and second-order Pfaffian (generalized) differentiation operators of functions set on a manifold. Normals on a manifold are considered.

Differentials of the basic first-order (second-order) tangent vectors are linear maps from the first-order tangent space to the second-order (third-order) tangent space. Differentials of the basic first-order tangent vectors (basic vectors of the first-order normal) set a map which takes a first-order tangent vector into the second-order normal for the first-order tangent space of (into the third-order normal for second-order tangent space).

The map given by differentials of the basic first-order tangent vectors takes all tangent vectors to the vectors of the second-order normal. Such splitting the osculating space in the direct sum of the first-order tangent

space and second-order normal defines the simplest (canonical) affine connection which horizontal subspace is the indicated normal. This connection is flat and symmetric. The second-order normal is the horizontal subspace for this connection.

Derivatives of some basic vectors in the direction of other basic vectors are equal to values of differentials of the first vectors on the second vectors, and the order of differentials is equal to the order of vectors along which differentiation is made.

The maps set by differentials of basic vectors of r-order normal for (r – 1)-order tangent space take the basic first-order tangent vectors to the basic vectors of $(r+1)$-order normal for r-order tangent space.

Horizontal vectors for the simplest second-order connection are constructed. Second-order curvature and torsion tensors vanish in this connection. For horizontal vectors of the simplest second-order connection there is the decomposition by means of the basic vectors of the second- and third-order normals.

Keywords: differential forms, second-order space, pfaffian (generalized) derivatives, normal on manifold, affine connections.

References

1. *Akivis, M.A.:* Multidimensional differential geometry. Kalinin (1977) (in Russian).

2. *Baburova, O.V., Frolov, B.N.:* Mathematical bases of the modern theory of gravitation. Moskow (2012) (in Russian).

3. *Veblen, O., Whitehead, J.H.C.:* The foundations of differential geometry. Cambridge University Press (1932).

4. *Vosylius, R.V.:* Contravariant theory of differential prolongation in a model of a space with connection. J. Soviet Math., **28**:2, 208—256 (1985).

5. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu.G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

6. *Laptev, G.F.:* Main infinitesimal structures of higher orders on smooth manifold. Tr. Geom. Semin. VINITI. Moskow, 1, 139—189 (1966) (in Russian).

7. *Polyakova, K.V.:* Dual methods of investigation of differential-geometric structures. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 45, 92—104 (2014) (in Russian).

8. *Polyakova, K. V.:* Special affine connection of the 1st and 2nd orders. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 46, 114—128 (2015) (in Russian).

9. *Polyakova K. V.:* Vector-valued forms of the 1st, 2nd and 3rd orders for affine connection of the 2nd order. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 47, 108—125 (2016) (in Russian).

10. *Rybnikov, A. K.:* Affine connections of second order. Math. Notes, **29**:2, 143—149 (1981).

11. *Rybnikov, A. K.:* Second-order generalized affine connections. Soviet Math. (Izv. VUZ), **27**:1, 84—93 (1983).

12. *Shevchenko, Yu. I.:* Clothings of holonomic and non-holonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998) (in Russian).

13. *Catuogno, P.:* A geometric Itô formula. Matemática Contemporânea, 33, 85—99 (2005).

14. *Emery, M.:* An Invitation to second-order stochastic differential geometry (2007). Available at: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00145 073 [Accessed 20 April 2019].