ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

В.Н.Х у д е н к о

## ОБ ОСНОВНОМ ОБЪЕКТЕ $(n-1)$-МЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ СУБКВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В $n$-мерном проективном пространстве рассматриваются $(n-1)$-мерные многообразия $V_{n-1}$ $(n-3)$-мерных квадрик (субквадратичных элементов), $(n-2)$-мерные плоскости которых образуют $(n-1)$ параметрическое семейство. Получена система дифференциальных уравнений многообразия $V_{n-1}$. Найден его основной объект [I].

Отнесем пространство $P_n$ к подвижному реперу $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\}$. Инфинитезимальные перемещения репера определяются уравнениями

$$dA_J = \omega_J^{\mathcal{L}} A_{\mathcal{L}} \quad (J, \mathcal{L}, \mathcal{K} = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{1}$$

причем формы Пфаффа удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_J^{\mathcal{L}} = \omega_J^{\mathcal{K}} \wedge \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_{n+1}^{n+1} = 0. \tag{2}$$

Если вершины $A_\alpha$ $(\alpha, \beta, \gamma, \eta = 1, 2, \ldots, n-1)$ поместить в $(n-2)$-мерной плоскости субквадратичного элемента, то уравнения субквадратичного элемента и замкнутая система уравнений многообразия $V_{n-1}$ запишутся соответственно в виде

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^n = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad \det(a_{\alpha\beta}) = 1; \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \Theta_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \omega_\gamma, \quad \omega_\alpha^n = \Gamma_{\alpha}^{n\gamma} \omega_\gamma, \\ \Delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \wedge \omega_\gamma = 0, \quad \Delta\Gamma_{\alpha}^{n\gamma} \wedge \omega_\gamma = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha^{n+1},$$

$$\Delta\Gamma_{\alpha}^{n\gamma} = \nabla\Gamma_{\alpha}^{n\gamma} - \Gamma_{\alpha}^{n\beta}\Gamma_{\beta}^{n\gamma}\omega_n^{n+1} + \Gamma_{\alpha}^{n\gamma}(\omega_n^n - \omega_{n+1}^{n+1}) + \delta_\alpha^\gamma \omega_{n+1}^n,$$

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} = {} & \nabla\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}\Gamma_{\gamma}^{n\eta}\omega_n^{n+1} + \\ & + \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}\left(\frac{2}{n-1}\omega_\gamma^\gamma - \omega_{n+1}^{n+1}\right) + \\ & + \frac{2}{n-1} a_{\alpha\beta}\Gamma_{\gamma}^{n\eta}\omega_n^\gamma - 2a_{\gamma(\alpha}\Gamma_{\beta)}^{n\eta}\omega_n^\gamma + \\ & + \frac{2}{n-1} a_{\alpha\beta}\omega_{n+1}^\eta - 2a_{\gamma(\alpha}\delta_{\beta)}^\eta \omega_{n+1}^\gamma. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\nabla$ -символ ковариантного дифференцирования.

Обозначим

$$\mathcal{R}_J^{\mathcal{L}} = (\omega_J^{\mathcal{L}})_{\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{n-1} = 0}. \tag{6}$$

В системы (5) имеем:

$$\mathring{\nabla} a_{\alpha\beta} + \frac{2}{n-1}\Pi^{\gamma}_{\gamma} = 0,$$

$$\mathring{\nabla}\Gamma^{n\gamma}_{\alpha} - \Gamma^{n\beta}_{\alpha}\Gamma^{n\gamma}_{\beta}\Pi^{n+1}_{n} + \Gamma^{n\gamma}_{\alpha}(\Pi^{n}_{n} - \Pi^{n+1}_{n+1}) + \delta^{\gamma}_{\alpha}\Pi^{n}_{n+1} = 0, \qquad (7)$$

$$\mathring{\nabla}\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{n\eta}_{\gamma}\Pi^{n+1}_{n} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\left(\frac{2}{n-1}\Pi^{\gamma}_{\gamma} - \Pi^{n+1}_{n+1}\right) + \frac{2}{n-1}a_{\alpha\beta}\Gamma^{n\eta}_{\gamma}\Pi^{\gamma}_{n} - 2a_{\gamma(\alpha}\Gamma^{n\eta}_{\beta)}\Pi^{\gamma}_{n} + \frac{2}{n-1}a_{\alpha\beta}\Pi^{\eta}_{n+1} - 2a_{\gamma(\beta}\delta^{\eta}_{\alpha)}\Pi^{\gamma}_{n+1} = 0,$$

где нолик над символом $\nabla$ означает фиксацию первичных параметров в соответствующем выражении.

Зададим компонентам фундаментального объекта $\Gamma = \{a_{\alpha\beta}, \Gamma^{n\gamma}_{\alpha}, \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\}$ следующие постоянные значения:

$$\mathring{a}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta},\ \Gamma^{n\hat\imath}_{\hat\imath} = \hat\imath,\ \Gamma^{1}_{\hat\alpha\hat\alpha} = \hat\alpha, \qquad (8)$$

где

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \pm 1;\ \prod_{\alpha=1}^{n-1}\varepsilon_{\alpha\alpha} = 1;\ \hat\alpha,\hat\beta = 4,5,\dots,n-1;\ \hat\imath,\hat\jmath = 1,2,3$$

и по $\hat\imath$ суммирование не производится.

Все остальные компоненты фундаментального объекта $\Gamma$ положим равными нулю. К системе (5) присоединим формальную алгебраическую систему



$$X_{\alpha\beta} - \mathring{a}_{\gamma\beta}Y^{\gamma}_{\alpha} - \mathring{a}_{\alpha\gamma}Y^{\gamma}_{\beta} + \frac{2}{n-1}\mathring{a}_{\alpha\beta}Y^{\gamma}_{\gamma} = 0$$

$$X^{\gamma}_{\alpha} - \mathring{\Gamma}^{n\gamma}_{\beta}Y^{\beta}_{\gamma} + \mathring{\Gamma}^{n\beta}_{\alpha}Y^{\gamma}_{\beta} - \mathring{\Gamma}^{n\beta}_{\alpha}\mathring{\Gamma}^{n\gamma}_{\beta}Y^{n+1}_{n} + \mathring{\Gamma}^{n\gamma}_{\alpha}(Y^{n}_{n} - Y^{n+1}_{n+1}) + \delta^{\gamma}_{\alpha}Y^{n}_{n+1} = 0 \qquad (9)$$

$$X^{\eta}_{\alpha\beta} - \mathring{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta}Y^{\gamma}_{\beta} - \mathring{\Gamma}^{\eta}_{\gamma\beta}Y^{\gamma}_{\alpha} + \mathring{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}Y^{\eta}_{\gamma} - \mathring{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathring{\Gamma}^{n\eta}_{\gamma}Y^{n+1}_{n} + \mathring{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta}\left(\frac{2}{n-1}Y^{\gamma}_{\gamma} - Y^{n+1}_{n+1}\right) + \frac{2}{n-1}\mathring{\Gamma}^{n\eta}_{\gamma}\mathring{a}_{\alpha\beta}Y^{\gamma}_{n} - 2\mathring{a}_{\gamma(\alpha}\mathring{\Gamma}^{n\eta}_{\beta)}Y^{\gamma}_{n} + \frac{2}{n-1}\mathring{a}_{\alpha\beta}Y^{\eta}_{n+1} - 2\mathring{a}_{\gamma(\alpha}\delta^{\eta}_{\beta)}Y^{\gamma}_{n+1} = 0.$$

Из системы (9) находим

$$Y^{\hat\jmath}_{\hat\imath} = \frac{X^{\hat\jmath}_{\hat\imath}}{(\hat\jmath - \hat\imath)},\quad \hat\imath \ne \hat\jmath$$

$$Y^{\hat\beta}_{\hat\alpha} = \frac{X_{\hat\alpha\hat\beta} - \hat\alpha\varepsilon_{\hat\alpha\hat\beta}X_{\hat\alpha\hat\beta}}{\hat\beta - \hat\alpha\varepsilon_{\hat\alpha\hat\alpha}\varepsilon_{\hat\beta\hat\beta}},\quad \hat\alpha \ne \hat\beta,$$

$$Y^{\beta}_{n} = \varepsilon_{\beta\beta}(X^{2}_{2\beta} - X^{1}_{1\beta}),$$

$$Y^{\beta}_{n+1} = \varepsilon_{\beta\beta}(2X^{1}_{1\beta} - X^{2}_{2\beta}),$$

$$Y^{\alpha}_{\alpha} = \frac{\Delta_{\alpha}(n-1)}{2(n-3)^{n-1}(2n-3)},$$ (по $\alpha$ не суммировать!)

$$Y^{n+1}_{n+1} = \frac{5}{4} X^1_1 - 2X^2_2 + \frac{3}{4} X^3_3 - \frac{1}{2} A,$$

$$Y^{n}_{n} = -\frac{5}{4} X^1_1 + 2X^2_2 - \frac{3}{4} X^3_3 - \frac{1}{2} A,$$

$$Y^{n}_{n+1} = -\frac{6}{4} X^1_1 - 3X^2_2 + 2X^3_3,$$

$$Y^{n+1}_{n} = -\frac{1}{2} X^1_1 + X^2_2 - \frac{1}{2} X^3_3,$$

где

$$A = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\Delta_\alpha (n-1)}{2(n-3)^{n-1}(2n-3)}$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} n-2 & 1 & \dots & X_{11}\varepsilon_{11} & \dots & 1 \\ 1 & n-2 & \dots & X_{22}\varepsilon_{22} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & X_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\alpha\alpha} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & X_{n-1,n-1}\varepsilon_{n-1,n-1} & \dots & n-2 \end{vmatrix}$$

Из того, что формальная система (9) алгебраически разрешима относительно величин $Y^\alpha_\varkappa$ следует, что система дифференциальных уравнений (7) разрешима в окрестности точки $(\mathring{a}_{\alpha\beta}, \mathring{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta}, \mathring{\Gamma}^{n\beta}_{\alpha})$ относительно всех вторичных форм. Доказана следующая теорема:

Т е о р е м а I. Фундаментальный объект первого порядка $\Gamma$ является основным объектом многообразия $V_{n-1}$ субквадратичных элементов [I].



## Список литературы

I. Л а п т е в Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Труды Моск.матем.об-ва", I953, №2, с.275-382 (М., ГИТТЛ).