$$2\xi^{k} b_{kl} + b^{ij} b_{ijl} = 0. \tag{34}$$

Наконец, свернув (34) с b^{kl}, получим

$$\xi^{k} = \frac{1}{2(n-1)} b^{ij} b^{kl} b_{ijl}. \tag{35}$$

Формула (35) показывает, как выбрать псевдонормаль (3) так, чтобы получить на поверхности $V_{n-1} \subset E_n$ риманову связность с основным тензором b_{ij}.

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Тр.Моск.мат.о-ва", 1963, т.2, с.275-382.

2. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. Изд. 2-е испр. М., "Наука", 1976, с.432.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

Л.Г. К о р с а к о в а

ПАРЫ $\mathcal{D}$

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются пары $\mathcal{D}$ конгруэнций коник C_1 и C_2, не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей, причем коники C_1 и C_2 имеют две общие точки пересечения с прямой ℓ. Исследуется пара $\mathcal{D}$, все коники которой инцидентны одной квадрике- пара $\mathcal{D}^{Q}$.

§ 1. Пары $\mathcal{D}^{Q}$ конгруэнций коник, инцидентных инвариантной квадрике

Рассмотрим в пространстве P_3 пару (C_1, C_2) [1] конгруэнций коник C_1 и C_2, не лежащих в одной плоскости и не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей α_1 и α_2, описывающих двупараметрические семейства. Отнесем пару (C_1, C_2) к реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где вершина A_i $(i,j,k = 1,2; i \neq j$, по индексам i,j не суммировать) репера R -одна из точек пересечения коники C_j с прямой ℓ. Вершины A_{i+2} являются полюсами прямой ℓ относительно коники C_i соответственно. Деривационные формулы репера R имеют вид

$$dA_{\alpha} = \omega_{\alpha}^{\beta} A_{\beta} \quad (\alpha, \beta, \eta = 1,2,3,4),$$

где линейные дифференциальные формы ω_{α}^{β} удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства $\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta$ и условию эквипроективности $\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0$.

Коники C_1 и C_2 в репере R при соответствующей нормировке вершин определяются уравнениями

$$(x^3)^2-(a_1x^1)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0; \tag{1.1}$$

$$(x^4)^2-(a_2x^2)^2-2x^1x^2=0,\quad x^3=0. \tag{1.2}$$

Пара (C_1, C_2) конгруэнций коник C_1 и C_2 называется парой $\mathcal{D}$ [2], если коники C_1 и C_2 пересекаются в точках A_i.

Условия, аналитически характеризующие пары $\mathcal{D}$, имеют вид:

$$a_1=a_2=0. \tag{1.3}$$

Обозначим

$$\omega_i^4=\omega_i. \tag{1.4}$$

Система пфаффовых уравнений пары $\mathcal{D}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}&\omega_i^j=\Gamma_i^{jk}\omega_k,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\\ &\omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k,\quad \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\ \Omega_i=b_i^k\omega_k,\end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$\Omega_i=\omega_i^i+\omega_j^j-2\omega_{i+2}^{i+2}.$$

Рассмотрим задачу о принадлежности всех коник C_1 и C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2) пары $\mathcal{D}$ некоторой инвариантной квадрике Q, уравнение которой в общем случае может быть записано в виде:

$$Q\equiv(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2+2cx^3x^4=0. \tag{1.6}$$

Пары $\mathcal{D}$, у которых все коники C_1, C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2) принадлежат инвариантной квадрике Q, назовем парами $\mathcal{D}^Q$.

Из условия

$$dQ=(2\Theta-\omega_1^1-\omega_2^2)Q\qquad(\mathcal{D}\Theta=0) \tag{1.7}$$

инвариантности квадрики Q получим, что выполняются следующие соотношения:

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_3^i=\omega_j^3+c\omega_j,\quad \omega_4^i=c\omega_j^3+\omega_j, \tag{1.8}$$

$$\Omega_1=2c\omega_3^4,\ \Omega_2=2c\omega_4^3,\ dc+(c^2-1)(\omega_3^4+\omega_4^3)=0.$$

Пары $\mathcal{D}^Q$ определяются уравнениями (1.8), уравнениями

$$\omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k \tag{1.9}$$

и замыканиями уравнений (1.8). Анализируя эту систему, приходим к выводу, что пары $\mathcal{D}^Q$ существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 1. Пары $\mathcal{D}^Q$ обладают следующими свойствами: 1/точка A_i является фокусом лучей A_iA_3; A_iA_4 прямолинейных конгруэнций (A_iA_3), (A_iA_4); 2/одно семейство торсов прямолинейной конгруэнции (A_iA_3) соответствует линиям, огибаемым прямыми A_iA_3 на поверхности (A_i); 3/торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/Справедливость первого утверждения следует из формул, определяющих фокусы $F_i=s_iA_i+t_iA_3$, $\Phi_i=\lambda_iA_i+\mu_iA_4$ лучей A_iA_3, A_iA_4 конгруэнций (A_iA_3), (A_iA_4) соответственно, где

$$t_i\{s_i\Gamma_i^{3j}+t_i[\Gamma_i^{3j}\Gamma_3^{4i}-(\Gamma_i^{3i}+c)\Gamma_3^{4j}]\}=0,$$

$$\mu_i\{\lambda_i\Gamma_i^{3j}+\mu_i[\Gamma_4^{3j}(c\Gamma_i^{3i}+1)-c\Gamma_4^{3i}\Gamma_i^{3j}]\}=0.$$

2/Торсы конгруэнции (A_iA_3) определяются уравнениями

$$\omega_i\,\omega_3^j=0.$$

3/Для определения торсов конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) имеем уравнения:

$$\omega_1^3 \omega_2 - \omega_1 \omega_2^3 = 0,$$

$$(1-c^2)(\omega_1^3 \omega_2 - \omega_1 \omega_2^3) = 0,$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

С л е д с т в и е. Прямые A_1A_2 и A_3A_4 полярно сопряжены относительно квадрики Q .

Т е о р е м а 2. Квадрика Q тогда и только тогда является конусом, когда конгруэнция (C_1) (или (C_2)) коник C_1 (или C_2) расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадрика Q вырождается в конус, если выполняется условие

$$\nu \equiv c^2 - 1 = 0. \qquad (1.10)$$

Учитывая условия (1.10), (1.3) и систему пфаффовых уравнений пары $\mathcal{D}^Q$ (1.8), (1.9) в квадратичных уравнениях [1, стр. 211-212], определяющих расслоения от конгруэнций (C_1) и (C_2) коник к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4), убеждаемся, что они тождественно удовлетворяются. Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь конгруэнция (C_1) коник C_1 расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4). Тогда выполняются следующие квадратичные уравнения:

$$\nu\,\omega_2 \wedge \omega_1 = 0, \quad \nu\,\omega_3^4 \wedge \omega_2 = 0, \quad \nu\,\omega_3^4 \wedge \omega_1 = 0.$$

Допустим, что $\nu \neq 0$.

Значит, имеют место уравнения

$$\omega_2 \wedge \omega_1 = 0, \quad \omega_3^4 \wedge \omega_2 = 0, \quad \omega_3^4 \wedge \omega_1 = 0,$$

благодаря которым размерность многообразия плоскостей коник C_1 меньше двух, чего быть не может.

Следовательно, $\nu = 0$.

Аналогичную картину мы получим, если рассмотреть расслоение от конгруэнции (C_2) коник к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4). Теорема доказана.

Отметим, что вершиной конуса является точка $E = A_3 - \varepsilon A_4$ $(\varepsilon^2=1)$, прямолинейная конгруэнция (A_3A_4) представляет собой связку прямых с центром в точке E , поскольку $dE = (\omega_3^3 - \varepsilon\,\omega_4^3)E$.

§ 2. Характеристические пары $\mathcal{D}^Q$

О п р е д е л е н и е. Пара $\mathcal{D}^Q$ называется характеристической, если: 1/ точка A_3 является характеристической точкой плоскости коники C_1; 2/ линии на поверхности (A_3), огибаемые прямыми A_3A_i, являются ее асимптотическими линиями.

Для характеристической пары $\mathcal{D}^Q$ выполняются условия:

$$\omega_3^4 = 0, \quad \Gamma_2^{31} = \Gamma_1^{32} = 0. \qquad (2.1)$$

Замыкая уравнение $\omega_3^4 = 0$, имеем:

$$\Gamma_1^{31} = \Gamma_2^{32} = \gamma.$$

Система пфаффовых уравнений характеристической пары $\mathcal{D}^Q$ примет вид:

$$\begin{gathered}\omega_i^j = 0, \quad \omega_1^3 = \gamma\,\omega_1, \quad \omega_2^3 = \gamma\,\omega_2, \quad \omega_3^i = \omega_j^3 + c\,\omega_j, \\ \omega_4^i = c\,\omega_j^3 + \omega_j, \quad \omega_3^4 = 0, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \qquad (2.2) \\ \Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 2c\,\omega_4^3, \quad dc = (1-c^2)\,\omega_4^3, \ d\gamma = -(\gamma c+1)\,\omega_4^3.\end{gathered}$$

Характеристические пары $\mathcal{D}^Q$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 3. Характеристические пары $\mathcal{D}^Q$ обладают следующими свойствами: I/множества точек (A_1) и (A_2) являются плоскими линиями, касательные к которым пересекаются в точке $P=\gamma A_3 + A_4$; 2/пара конгруэнций $(A_3 A_4)$ и $(A_1 A_2)$ односторонне расслояема от $(A_3 A_4)$ к $(A_1 A_2)$; 3/конгруэнция $(A_i A_4)$ -параболическая; 4/многообразия прямых $(A_1 A_3)$, $(A_2 A_3)$ являются линейчатыми поверхностями; 5/плоскости $(A_i A_3 A_4)$ описывают однопараметрическое семейство; 6/прямолинейная конгруэнция $(A_3 A_4)$ является связкой, центр которой совпадает с точкой пересечения характеристик плоскостей $(A_1 A_3 A_4)$ и $(A_2 A_3 A_4)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Имеем:

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \omega_i P,$$

$$dP = -\frac{3}{4} c\,\omega_4^3 P + (\gamma^2 + 2\gamma c + 1)(\omega_2 A_1 + \omega_1 A_2).$$

Так как

$$(d^{(n)} A_i\, A_1 A_2 P) = 0,$$

то линия (A_i) -плоская, (P) -плоскость $(P A_1 A_2)$.

2/Квадратичные уравнения

$$\omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^1 \wedge \omega_1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2 = 0,$$

$$\omega_3^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^3 - \omega_4^1 \wedge \omega_1 - \omega_4^2 \wedge \omega_2 = 0,$$

характеризующие расслоение от конгруэнции $(A_3 A_4)$ к $(A_1 A_2)$ [3, стр. 67], тождественно удовлетворяются в силу уравнений (2.2).

3/Фокусы $F_i = m_i A_i + n_i A_4$ луча $A_i A_4$ конгруэнции $(A_i A_4)$ определяются уравнениями

$$(n_i)^2 = 0,$$

следовательно, конгруэнция $(A_i A_4)$ -параболическая, A_i - сдвоенный фокус ее луча.

4/Имеем:

$$d[A_i A_3] = (\omega_i^i + \omega_3^3)[A_i A_3] + \omega_i \{[A_4 A_3] + (\gamma + c)[A_1 A_2]\},$$

откуда непосредственно следует, что прямые $(A_i A_3)$ описывают однопараметрическое многообразие.

5/Поскольку

$$d\,[A_i A_3 A_4]\Big|_{\omega_i = 0} = -\omega_j^j\,[A_i A_3 A_4],$$

то плоскости $(A_i A_3 A_4)$ неподвижны вдоль линий $\omega_i = 0$, соответствующих асимптотическим линиям на поверхности (A_3).

6/Характеристика плоскости $(A_i A_3 A_4)$ задается уравнениями

$$x^3(\gamma + c) + x^4(\gamma c + 1) = 0, \quad x^j = 0$$

Точка T пересечения характеристик плоскостей $(A_1 A_3 A_4)$ и $(A_2 A_3 A_4)$ определяется формулой

$$T = -(c\gamma + 1) A_3 + (\gamma + c) A_4,$$

причем $dT = -\frac{7}{4} c\,\omega_4^3 T$, то есть точка T неподвижна. Многообразие прямых $A_3 A_4$ -двупараметрическое, все прямые этого семейства проходят через неподвижную точку, значит $(A_3 A_4)$ -связка. Теорема доказана.

Для характеристической поверхности (A_3) найдено трехпараметрическое семейство соприкасающихся квадрик, уравнение которого в неоднородных координатах имеет вид:

$$a_{44} z^2 + 2[xy - (\gamma + c) z] + 2 a_{24} yz + 2 a_{14} xz = 0,$$

где

$$x=\frac{x^1}{x^3},\quad y=\frac{x^2}{x^3},\quad z=\frac{x^4}{x^3}.$$

Т е о р е м а 4. Поверхность (A_3) является невырожденной инвариантной квадрикой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение квадрики Ли поверхности (A_3) в однородных координатах имеет вид:

$$\Phi\equiv(\gamma^2-1)(x^4)^2+2x^1x^2-2(\gamma+c)x^3x^4=0. \qquad (2.3)$$

Дифференцируя уравнение (2.3) с помощью уравнений стационарности [4]

$$dx^\alpha=-x^\beta\omega^\alpha_\beta+\theta x^\alpha \quad (\mathcal{D}\theta=0),$$

убеждаемся, что

$$d\Phi=(2\theta-\tfrac{1}{2}c\omega^3_4)\Phi,$$

то есть Φ -инвариантная квадрика и поверхность (A_3) совпадает с ней. Точки A_1 и A_2 инцидентны квадрике (A_3), прямые A_1A_2 и A_3A_4 полярно сопряжены относительно нее.

Т е о р е м а 5. Пусть K_α -квадратичное многообразие, образованное пересечением квадрики (A_3) плоскостью $x^\alpha=0$. Тогда K_3 -коники, касающаяся коники C_2 в точках A_1 и A_2; K_i и K_4 распадаются на пару прямых.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Многообразия K_3, K_i и K_4 определяются соответственно уравнениями:

$$x^3=0,\quad (\gamma^2-1)(x^4)^2+2x^1x^2=0,$$

$$x^i=0,\quad x^4[(\gamma^2-1)x^4-2(\gamma+c)x^3]=0,$$

$$x^4=0,\quad x^1x^2=0,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур. - "Тр. геометрического семинара ВИНИТИ АН СССР", М., 1971, 3, с. 193-220.

2. К о р с а к о в а Л.Г. Пары конгруэнций коник в P_3, не касающихся линии пересечения своих плоскостей. - В кн.: Всесоюзная научная конференция по неевклидовой геометрии. 150 лет геометрии Лобачевского (тезисы докладов). Казань, 1976, с. 104.

3. Ф и н и к о в С.П. Теория пар конгруэнций. М., ГИТТЛ, 1956.

4. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. - "Тр. Московского математического общества", 1953, т. 2, с. 275-383.