4. Г о л у б и ц к и й М., Гиемин В. Устойчивые отображения и их особенности. М.: Мир, 1977. 290с.

5. Г о д б и й о н К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188с.

УДК 514.75

ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ ГИПЕРКВАДРИК, ПОРОЖДЕННЫЕ ТОЧЕЧНЫМ СООТВЕТСТВИЕМ

Б.А. А н д р е е в
(Калининградский государственный университет)

В работе изучается точечное соответствие f проективных пространств P_n, $\hat{P}_n$. Найдены четыре отображения многообразий гиперквадрик из P_n и $\hat{P}_n$, которые порождаются соответствием f для каждой пары соответствующих точек. Доказан ряд предложений, в которых дана геометрическая характеристика этих отображений и указана их связь с характеристическими направлениями отображения f и порожденной отображением f связностью.

1. Рассмотрим дифференцируемое отображение $f: P \in P_n \mapsto p = f(P) \in \hat{P}_n$ проективных пространств, причем $\operatorname{rang} f = n$ в каждой точке области определения. Располагая вершины подвижных реперов R и r соответственно пространств P_n и $\hat{P}_n$ как в работе [1], получаем систему дифференциальных уравнений отображения f в виде

$$\omega_0^i = \Lambda_J^i \Omega_0^J . \tag{I}$$

Двукратное продолжение системы (I) приводит к фундаментальному объекту $\Gamma_2 = \{\Lambda_J^i, \Lambda_{JK}^i\}$ второго порядка отображения f; дифференциальные уравнения объекта Γ_2 имеют вид (4), (5) [1], а равенство (6) [1] принимает вид: $\operatorname{rang}[\Lambda_J^i] = n$.

2. Пусть $\mathcal{H}(p)$ -многообразие всех гиперквадрик $q \subset \hat{P}_n$, содержащих точку p. Уравнение гиперквадрики $q \in \mathcal{H}(p)$ запишется в виде:

$$a_{ij} x^i x^j + 2 a_i x^i x^0 = 0 . \tag{2}$$

Закон изменения величин a_i, a_{ij} при фиксированных первичных параметрах (т.е. при фиксации пары (P, p)) приводится к виду

$$\overset{\circ}{\nabla} a_i = 0, \qquad \overset{\circ}{\nabla} a_{ij} = a_{(i} \pi_{j)}^0 . \tag{3}$$

Заметим, что объект $\{a_i\}$ определяет касательную гиперплоскость к гиперповерхности (2) в точке p. Из (2) получаем: $\dim \mathcal{H}(p) = C_{n+1}^2 + n - 1$.

Пусть $\hat{B}$ -множество гиперплоскостей в $\hat{P}_n$, содержащих точку p, тогда $\hat{B}$ является $(n-1)$-мерным подпространством в проективном пространстве, двойственном к $\hat{P}_n$. Пусть $H(p)$ -многообразие гиперквадрик из $\mathcal{H}(p)$, для которых точка p является неособой точкой. Многообразие $H(p)$ естественным образом расслаивается над пространством $\hat{B}$: слой над $\hat{b} \in \hat{B}$ состоит из всех $q \in H(p)$, для которых гиперплоскость $\hat{b}$ является касательной к гиперквадрике q в точке p. Будем обозначать этот слой символом $\mathcal{H}(p, \hat{b})$. Имеем: $\dim \mathcal{H}(p, \hat{b}) = C_{n+1}^2 - 1$. Проведя аналогичные рассмотрения для P_n, получаем в соответствующих обозначениях для $Q \in \mathcal{H}(P)$:

$$A_{JK} X^J X^K + 2 A_J X^J X^0 = 0, \tag{4}$$

$$\overset{\circ}{\nabla} A_J = 0, \qquad \overset{\circ}{\nabla} A_{JK} = A_{(J} \Pi_{K)}^0 . \tag{5}$$

Так же, как в случае $\hat{P}_n$, многообразие $H(P)$ расслаивается над множеством B гиперплоскостей, инцидентных точке P; слой над $b \in B$ обозначим символом $\mathcal{H}(P, b)$.

3. П р е д л о ж е н и е 1. Отображение $f: P_n \to \hat{P}_n$ во 2-й дифференциальной окрестности каждой пары (P, p) соответствующих точек порождает отображение $f_q: q \in \mathcal{H}(p) \mapsto Q \in \mathcal{H}(P)$ многообразий гиперквадрик.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$A_J = \Lambda_J^i a_i , \tag{6}$$

$$A_{JK} = \Lambda_J^i \Lambda_K^j a_{ij} - \Lambda_{JK}^i a_i . \tag{7}$$

Из уравнений (4), (5) [1] следует, что, если для a_i, a_{ij} выполняются (3), то для A_J, A_{JK} при этом из (6), (7) вытекает выполнение уравнений (5). Таким образом, формулы (6), (7) гиперквадрике (2) ставят в соответствие гиперквадрику (4).

Для выяснения геометрической характеристики отображения f_q рассмотрим его сужение f_q^0 на множество распадающихся гиперквадрик $q \in \mathcal{H}(p)$. Пусть (2) распадается. Тогда имеем:

$$a_{ij} = a_{(i} p_{j)} \tag{8}$$

Гиперквадрика q в этом случае определяет пучок гиперплоскостей A_q с базисными гиперплоскостями

$$a_i x^i = 0, \tag{9}$$

$$p_i x^i + x^0 = 0 . \tag{10}$$

2 Зак. 1209

Пусть $\pi_q: P_n \to A_q$ -отображение,которое точке $p\in\hat{P}_n$ ставит в соответствие инцидентную ей гиперплоскость пучка A_q. Пучок A_q с отмеченным элементом (10) обладает структурой расширенной аффинной прямой.Рассмотрим отображение $\pi_q\circ f: P_n \to A_q$ проективного пространства P_n в одномерное расширенное аффинное пространство A_q. Такое отображение является частным случаем изучавшегося автором отображения $P_m \to \hat{P}_n$ [2],[3]. Индикатриса [2,с.5] последнего отображения в случае $n=1$ является гиперквадрикой.Следовательно, индикатриса J_q отображения $\pi_q\circ f$, построенная для точки $P\in P_n$, является гиперквадрикой,содержащей точку P. Сравнивая (4),(6),(7) при выполнении (8) с уравнением (1)[2] в соответствующем репере,убеждаемся,что J_q совпадает с $f^\circ_q(q)$. Таким образом,справедливо

Предложение 2. Отображение f_q ставит в соответствие распавшейся гиперквадрике $q\in\mathcal{H}(p)$ индикатрису J_q отображения $\pi_q\circ f$.

Заметим,что многообразия $\mathcal{H}(P)$ и $\mathcal{H}(p)$ обладают естественной структурой проективного пространства.Так как множество матриц,задающих распавшиеся гиперквадрики из $\mathcal{H}(p)$, содержит базис множества матриц,определяющих все гиперквадрики из $\mathcal{H}(p)$, получаем

Предложение 3. Отображение f_q является единственным продолжением на $\mathcal{H}(p)$ отображения f°_q, являющимся проективным отображением $\mathcal{H}(p)\to\mathcal{H}(P)$.

Предложения 2 и 3 геометрически полностью характеризуют отображение f_q.

4.Принадлежащая связке касательных в точке P к отображению f коллинеаций $K(P_J)$ локальная коллинеация K_0 [4],[5] определяется уравнениями

$$x^i = \Lambda^i_j X^j,\quad x^0 = X^0 - \gamma_x X^x, \tag{11}$$

причем

$$\gamma_x = \frac{1}{n+1} V^j_i \Lambda^i_{jx}, \tag{12}$$

где V^j_i -компоненты матрицы,обратной к $[\Lambda^i_j]$. K_0 является,как и f, отображением $P\in P_n \mapsto p\in\hat{P}_n$, следовательно,оно также порождает отображение $\gamma_q: \mathcal{H}(p)\to\mathcal{H}(P)$ многообразий гиперквадрик.Повторяя рассуждения и построения,проведенные для отображения f_q, приходим к предложениям,аналогичным предложениям 1-3,и к формулам

$$A_j = \Lambda^i_j a_i,\quad A_{jx} = \Lambda^i_j \Lambda^j_x a_{ij} - \Lambda^i_{(j}\gamma_{x)} a_i, \tag{13}$$

задающим отображение γ_q.

Так как отображение K_0 определяется отображением f, мы получаем два отображения $\mathcal{H}(p)\to\mathcal{H}(P)$ многообразий гиперквадрик,порож-

Поскольку комплекс K представляет собой пятимерное семейство двумерных плоскостей,то через неособую точку плоскости L проходит двупараметрическая совокупность плоскостей комплекса,образующих гиперконус C. Совместим точку A_0 с вершиной этого гиперконуса.Проективизация гиперконуса C с центром в точке A_0 представляет собой линейчатую поверхность PC пространства $P^4=[A_1,A_2,A_3,A_4,A_5]$ с образующей $[A_1,A_2]$.При фиксированной точке A_0 формы ω^q_0 обращаются в нуль и из уравнений (7) получаем параметрические уравнения линейчатой поверхности PC в виде

$$\omega^p_k = \lambda^p_{k\ell}\theta^\ell. \tag{8}$$

Теорема 1. Вершина гиперконуса C принадлежит характеристической прямой плоскости L тогда и только тогда,когда для этой точки прямолинейные образующие поверхности PC касаются некоторой двумерной поверхности.

Доказательство.Пусть вершина гиперконуса C принадлежит характеристической прямой плоскости L. Совместим точку A_0 с этой вершиной,прямую $[A_0,A_1]$ - с характеристической прямой,а трехмерную плоскость $[A_0,A_1,A_2,A_5]$ с касательной 3-плоскостью к соответствующему торсу.В этом случае из (5) следует,что $\Lambda^{\alpha 2}_5=0$. Ввиду чего уравнения (1) не содержат форму ω^5_2. Поэтому указанную форму можно включить в число базисных форм комплекса.Так как точка A_0 по предположению является неособой точкой, то формы ω^p_0 ($p=3,4,5$) линейно независимы,и их также можно включить в систему базисных форм комплекса.Дополняя данные четыре формы до базиса комплекса независимой формой θ, получим параметрические уравнения комплекса:

$$\omega^\tau_k = \lambda^\tau_{kp}\omega^p_0 + \lambda^\tau_k\theta,\qquad \omega^5_1 = \lambda^5_{1p}\omega^p_0 + \lambda^5_1\theta, \tag{9}$$

где $k=1,2;\quad \tau=3,4$.

Рассмотрим теперь поверхность PC, соответствующую точке A_0. При фиксированной точке A_0 формы ω^p_0 обращаются в нуль и из (9) получим уравнения исследуемой поверхности в виде

$$\omega^\tau_k = \lambda^\tau_k\theta,\qquad \omega^5_1 = \lambda^5_1\theta. \tag{10}$$

Формы θ и ω^5_2 образуют базис на этой поверхности.

Рассмотрим произвольную точку $B=x^k A_k$ на прямой $[A_1,A_2]$ -образующей поверхности PC. Дифференциал этой точки в силу (10) вычисляется так:

$$dB = (dx^k + x^\ell\omega^k_\ell)A_k + (x^k\lambda^3_k\theta)A_3 + (x^k\lambda^4_k\theta)A_4 + (x^1\lambda^5_1\theta + x^2\omega^5_2)A_5.$$

Предложение 5. Конус Π_b является множеством точек стационарности отображения $\varphi_q|_b$.

Итак, формула (I8) каждому $b \in B$ ставит в соответствие конус стационарности для слоя над b, т.е. имеется (n-I)-мерное семейство конусов стационарности.

Предложение 6. Семейство конусов стационарности отображения φ_q определяет множество X характеристических прямых отображения f.

Доказательство. В семействе (I8) n конусов $\Pi^T_{\gamma x} X^\gamma X^x = 0$ образуют базис. Доказываемое утверждение теперь вытекает из формулы (I.II)[6], задающей характеристические направления отображения f.

Библиографический список

I. Андреев Б.А. К теории точечных отображений//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./ Калинингр.ун-т.Калининград, I989.Вып.20.С.9-I4.

2. Андреев Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз. темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, I987.Вып.I8.С.5-9.

3. Андреев Б.А. Некоторые типы характеристической конфигурации отображения f //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, I980.Вып.II.С.3-6.

4. Чех Э. Проективно-дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами.I//Чехосл.матем.ж.I952. V. 2.№I.С.91-107.

5. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами//Геометрия,1963.Итоги науки/ВИНИТИ.М., I965. С.65-I07.

6. Павлюченко Ю.В., Рыжков В.В. Об изгибании точечных соответствий между пространствами//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М., I969. Т.2.С.263-275.

7. Vranceanu G., Sul tensore associato ad corrispondenza fra spazi proettivi // Boll. Unione mat. ital. 1957. V.12. N4. P.489-506.

УДК 514.755.5

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПЯТИМЕРНЫХ КОМПЛЕКСОВ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P^5

И.В.Бубякин

(Московский институт стали и сплавов)

I. Рассмотрим пятипараметрическое семейство двумерных плоскостей L в проективном пространстве P^5, т.е. пятимерный комплекс K. Свяжем с плоскостью L семейство точечных проективных реперов, образованных точками A_J ($I, J = 0,\dots,5$), так, чтобы точки A_i ($i, j = 0,1,2$) лежали в плоскости L. Обозначим через ω^J_I линейные дифференциальные формы, определяющие перемещение точечного репера. Перемещение плоскости $L = [A_0, A_1, A_2]$ в пространстве P^5 будут определять формы ω^p_i ($p, q = 3,4,5$). Поскольку плоскость L зависит от пяти параметров, то среди этих форм лишь пять линейно независимых. Поэтому комплекс K определяется четырьмя независимыми уравнениями

$$\Lambda^{\alpha i}_p \omega^p_i = 0, \quad \alpha = 1,2,3,4. \qquad (I)$$

Через каждую плоскость L комплекса K проходит в общем случае шесть его торсов [1]. Эти торсы находятся из условия [2]:

$$\operatorname{rang}(\omega^p_i) = 1, \qquad (2)$$

где формы ω^p_i удовлетворяют уравнениям (I). Условие (2) эквивалентно параметрическим уравнениям

$$\omega^p_i = a_i x^p dt. \qquad (3)$$

Пусть M -произвольная точка плоскости L, тогда $M = x^i A_i$. Дифференциал этой точки в силу (3) записывается в виде

$$dM = (dx^i + x^j \omega^i_j) A_i + (a_i x^i)(x^p A_p)\,dt. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что прямая, определяемая в плоскости L уравнением $a_i x^i = 0$, является характеристической прямой торса (3), а трехмерная плоскость $[A_0, A_1, A_2, x^p A_p]$-касательной 3-плоскостью к этому торсу.

Из уравнений (1) в силу (3) получим

$$\Lambda^{\alpha i}_p a_i x^p = 0. \qquad (5)$$

Эта система определяет трехмерную касательную плоскость к торсу, если

$$\operatorname{rang}(\Lambda^{\alpha i}_p a_i) = 2. \qquad (6)$$

Из условия (6) находятся тангенциальные координаты характеристических прямых на плоскости L.

2. Точка M плоскости L называется особой, если при изменении всех параметров комплекса она описывает некоторую поверхность [3]. Будем считать точку A_0 плоскости L неособой. В этом случае формы ω^p_0 являются линейно независимыми и их можно включить в число базисных форм комплекса. Дополним их до базиса комплекса независимыми θ^k ($k, \ell = 1,2$). Тогда из уравнений (I) получаем параметрические уравнения комплекса в виде

$$\omega^p_k = \lambda^p_{kq}\omega^q_0 + \lambda^p_{k\ell}\theta^\ell. \qquad (7)$$