УДК 378+539.3

Г. Н. Карпов

О МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫХ СВЯЗЯХ ПРИ ПОДГОТОВКЕ СПЕЦИАЛИСТОВ ПО ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассматривается проблема подготовки специалистов по теории упругости. Предлагается параллельное изучение математики и механики, в частности теории упругости. Приводится пример организации учебного процесса для решения плоской задачи данной теории обратным методом. Показано, что анализ обратных задач теории упругости может способствовать эффективному решению методических вопросов преподавания математики и механики.

This article addresses the problem of training specialists in elasticity theory. The author suggests parallel studying of mathematics and mechanics, in particular, elasticity theory. The author considers the case of organizing train-

---

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. Вып. 11. С. 79 – 86.

ing process for solving a two-dimensional problem of the theory through an inversed method. It is shown that the analysis of inversed problems of elasticity theory can contribute to the efficient solution of methodological issues of teaching mathematics and mechanics.

Ключевые слова: учебный процесс, бигармоническое уравнение, координатные системы, функция Эри, нагрузки, напряжения, напряженное состояние.

Key words: educational process, biharmonic equation, coordinate systems, Airy function, load, stress, stress condition.

Перманентно текущее реформирование высшей школы не способствует установлению четко нацеленного учебного процесса. Психологически студенты начальных курсов не готовы к тому, что изучение конкретной дисциплины необходимо как в будущей профессиональной деятельности, так и при освоении специальных дисциплин. С нетерпением ожидая изучение предметов по специальности, они халатно относятся к общеобразовательным. Междисциплинарное построение учебного процесса будет способствовать разрешению этой проблемы.

Автор данной статьи в своей научной и педагогической деятельности неоднократно сталкивается с проблемами отсутствия в нашем регионе специалистов по теории упругости как науки, имеющей целью аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния упругого тела. Ощущается потребность в специалистах, связанных с процессами проектирования и эксплуатации различных инженерных объектов и их элементов.

В вузах регионов из прочностного цикла сохранились сопротивление материалов и строительная механика. Теория упругости исключена из учебного процесса. Программы и подходы к преподаванию науки о прочности устарели и требуют совершенствования. Нерешаемой остается также задача кооперации в преподавании дисциплин. Одним из возможных путей решения проблемы могло бы стать параллельное изучение родственных предметов. Пример — техническая механика с методической поддержкой в виде новых учебников и пособий [1; 2].

Хотя сопротивление материалов не наука, а инженерное учение, использующее инженерные гипотезы, основанные на нем расчеты принимаются практикой и включаются в нормативные документы. Так, в Правилах классификации и постройки морских судов требования к размерам элементов корпусных конструкций (расчетные формулы) есть формулы сопротивления материалов и строительной механики корабля. В процессе эксплуатации судов появляются различного характера отказы: трещины в жестких точках узлов либо в местах концентрации напряжений, нарушающих герметичность и работоспособность вплоть до разрушения. Аналогичная ситуация наблюдается как в машиностроении, так и в гражданском строительстве. Это указывает на необходимость совершенствования соответствующих нормативных документов, что ляжет на плечи новых специалистов.

Теория упругости как наука строже подходит к постановке и решению задач расчета напряженно-деформированного состояния объектов. Однако ее математический аппарат сложен. Именно обсуждению в первую очередь математической стороны подготовки специалистов по решению задач плоской теории упругости посвящена данная статья, а в итоге — к обучению студентов прочностной науке.

Безусловно, работа Н. И. Мусхелишвили [3] в значительной степени продвинула теоретическое решение проблемы, широко используя функции комплексного переменного и комплексного отображения, то есть одна из задач в теории упругости — построение отображающих функций для различных односвязных и двухсвязных областей. Теорема Римана [4] устанавливает существование отображающей функции для односвязных и двусвязных областей, ограниченных гладкими кривыми с непрерывно изменяющейся касательной. Дополнительные трудности возникают при построении отображений многосвязных областей. Задача построения отображающей функции для наперед заданной области, обеспечивающей умеренные вычислительные трудности, является в большинстве случаев неразрешимой с математической точки зрения.

Поверхностное знакомство с теорией упругости приводит лишь к знанию того, что решение задач для плоского напряженного состояния сводится к нахождению функции напряжений (функции Эри), которая служит решением бигармонического уравнения, записанного в удобной координатной системе, привязанной к форме объекта и заданных условиях на его границах. Это так называемая прямая задача. Ее решение предполагает серьезную математическую подготовленность в сочетании со знаниями о механике твердого деформируемого тела. Отсутствие того или другого обычно приводит к невозможности решения задач. Существует и обратная задача, в которой известными выступают либо перемещения, либо деформации, либо напряжения как функции координат точек плоскости, где необходимо найти две другие из указанных групп величины, а также внешние факторы, вызывающие это напряженно-деформируемое состояние плоскости. В научных кругах решение в такой постановке разыскивается крайне редко. Результаты его могут оказаться достаточно простыми по форме и полезными с практической точки зрения. Важно, что, обратная задача теории упругости всегда решается элементарно; и в соответствии с теоремой о единственности решение является точным. Например, в работе [5, с. 71] приводятся решения простейших задач теории упругости обратным методом, позволяющие оценить точность решений таких же задач методами сопротивления материалов и установить применимость гипотезы плоских сечений. Используемый в линейной теории упругости принцип суперпозиции позволяет суммировать результаты решения частных задач, получая новые частные решения.

Поэтому высказанное Б. Сен-Венаном [6, с. 18] мнение: «…следуя подобным путем, мы, к сожалению, имели бы весьма мало шансов даже после долгих попыток прийти к решениям, представляющим какой-либо интерес» — только мнение. Причем оно может быть признано обоснованным лишь с точки зрения получения практически значимого для инженера результата, но никак не с позиции построения образовательного процесса.

Пример постановки и решения образовательной задачи

Суть авторской методики постановки образовательных задач состоит в том, что решение обратной задачи теории упругости в напряжениях при отсутствии объемных сил приводится к нахождению функции Эри. Тогда, задаваясь этой функцией, проверяется обращение в тождество основного бигармонического уравнения, а далее определяются соответствующие граничные условия и условия на бесконечности. Решение в такой постановке по силам даже студентам младших курсов, задачи могут предлагаться как домашние либо контрольные работы.

Уже на этапе постановки условия студенты способны будут самостоятельно выбрать форму границы объекта, координатную систему, наилучшим образом описывающую эту форму, записать основное бигармоническое уравнение в выбранной координатной системе, а также выражения для вычисления напряжений, деформаций и перемещений. При этом обучающийся должен изучить, например, такие понятия, как нагрузка, напряжение в точке, тензор напряжений из курса технической механики. Безусловно, что все математические преобразования и подстановки выполняются самим студентом, что потребует как минимум умений дифференцирования и знания правил преобразования тригонометрических и гиперболических функций. Вместе с тем нарабатываются не только знания и умения, но и математическое чутье в сочетании со способностью анализировать результаты решения с механической точки зрения.

Приведем пример постановки и решения задачи для бесконечной пластины, ослабленной двумя одинаковыми круговыми отверстиями. В этом случае оправданным является использование биполярных координат [7, с. 167] (рис.). Не нарушая общности задачи, будем считать определяемую на границе контура и на бесконечности нагрузку симметричной относительно координатных осей.

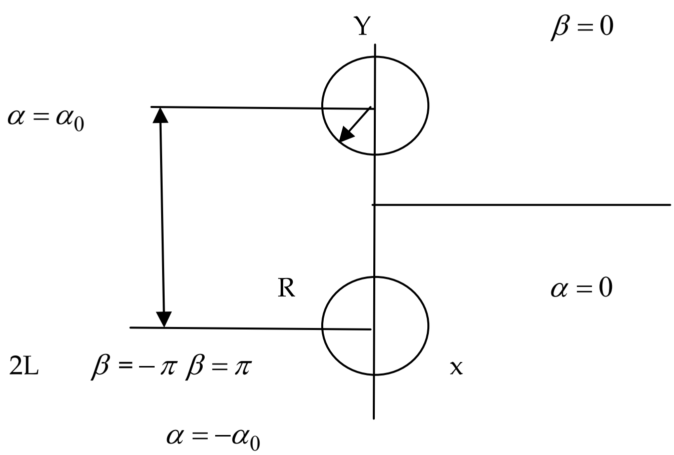

Рис. Объект в биполярной системе координат

Биполярная система координат α и β связана с декартовой следующими соотношениями:

$$x = a\frac{\sin\beta}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta},\ y = a\frac{\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta},\ \text{или } x + iy = a\, i\, \mathrm{cth}\,\frac{\alpha + i\beta}{2},$$

где a — размерный параметр равный половине расстояния между полюсами биполярной системы координат (далее будем полагать a = 1); величины α и β изменяются в пределах $-\infty \le \alpha \le \infty$, $-\pi \le \beta \le \pi$

Для рассматриваемого контура α и β принимают значения, указанные на рисунке 1. При этом величины L и R вычисляются по формулам

$$L = a\,\mathrm{cth}\,\alpha_0,\ R = a\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_0}\ \text{, то есть } \frac{L}{R} = \mathrm{ch}\alpha_0 .$$

Использование функции напряжений, как известно, сводит задачу к интегрированию бигармонического уравнения при заданных на границе плоскости значений самой функции Ф (α,β) и ее нормальных производных. Вместе с тем необходимо удовлетворить условию на бесконечности ($\alpha = 0$, $\beta = 0$).

Оператор Лапласа в биполярных координатах имеет следующий вид:

$$\Delta = \frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right),$$

где $h = \dfrac{\alpha}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta}$ — коэффициент Ляме.

Бигармоническое уравнение относительно функции $\frac{\Phi}{h}(\alpha,\beta)$:

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right)\left(\frac{\Phi}{h}\right) = 0. \qquad (1)$$

После нахождения функции $\frac{\Phi}{h}$ напряжения в пластине определяются по формулам

$$a\ \sigma_\alpha = \left[(\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \mathrm{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \mathrm{ch}\alpha\right]\left(\frac{\Phi}{h}\right),$$

$$a\ \sigma_\beta = \left[(\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \mathrm{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \cos\beta\right]\left(\frac{\Phi}{h}\right), \qquad (2)$$

$$a\ \tau_{\alpha\beta} = -(\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left(\frac{\Phi}{h}\right).$$

Ввиду симметрии задачи функция $\left(\frac{\Phi}{h}\right)$ должна быть четной по переменным α и β. Поэтому в дальнейшем можно рассматривать ее лишь при $0 \le \alpha \le \alpha_0$, $0 \le \beta \le \pi$.

Будем задавать функцию напряжений $\left(\frac{\Phi}{h}\right)$ и находить напряжения, действующие на границе отверстия и на бесконечности.

Логично, видимо, сконструировать функцию $\left(\frac{\Phi}{h}\right)$ так, чтобы она состояла из двух частей $\left(\frac{\Phi}{h}\right) = \left(\frac{\Phi}{h}\right)_0 + \left(\frac{\Phi}{h}\right)_1$, где $\left(\frac{\Phi}{h}\right)_0$ задавало бы нужную нагрузку на бесконечности (при этом она будет «наводить» нагрузку на контуре отверстий), а $\left(\frac{\Phi}{h}\right)_1$, не изменяя нагрузку на бесконечности, снимало либо изменяло бы «наведенную» нагрузку на контуре отверстий.

Согласно [5], напряжения на бесконечности, соответствующие всестороннему растяжению-сжатию, можно задать, приняв

$$\left(\frac{\Phi}{h}\right)_0 = \frac{ap}{2}\left(\text{ch}\alpha + \cos\beta\right). \tag{3}$$

Задать продольное растяжение пластины (нагрузка p на бесконечности действует параллельно оси Y (рис.) можно функцией

$$\left(\frac{\Phi}{h}\right)_0 = \frac{ap}{2}\frac{\sin^2\beta}{\text{ch}\alpha - \cos\beta}. \tag{4}$$

Поперечное же растяжение (нагрузка p на бесконечности действует параллельно оси X) — функцией

$$\left(\frac{\Phi}{h}\right)_0 = \frac{ap}{2}\frac{\text{sh}^2\alpha}{\text{ch}\alpha - \cos\beta}. \tag{5}$$

Выбор функции $\left(\frac{\Phi}{h}\right)_1$ должен быть не случайным, а обоснованным.

Например, ее выбор в виде $\left(\frac{\Phi}{h}\right)_1 = ap\frac{\alpha\text{sh}\alpha}{\left(\text{sh}\alpha_0\right)^2}$ (6)

продиктован следующими соображениями:

— она удовлетворяет уравнение (1) тождественно и является четной, что соответствует условию задачи;

— на бесконечности $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \tau_{\alpha\beta} = 0$.

Здесь следует отметить тот факт, что согласно (2) напряжения на бесконечности (при α = 0, β = 0) равны значению функции напряжений $\left(\frac{\Phi}{h}\right)_1$. На границе же круговых отверстий (при $\alpha = \pm\alpha_0$, $-\pi \le \beta \le \pi$) $\sigma_\alpha = -\text{p}$.

В результате получено решение задачи о взаимодействии двух круговых отверстий в бесконечной пластине, нагруженных гидростатическим давлением p при отсутствии нагрузки на бесконечности.

На оси Y при $\beta = \pm \pi$ $\left(0 \le \alpha \le \alpha_0\right)$

$$\sigma_\beta = \mathrm{p}\frac{\left(\mathrm{ch}\alpha + 1\right)^2}{\left(\mathrm{sh}\alpha_0\right)^2} = \mathrm{p}\frac{4\,\mathrm{ch}^4\left(\alpha/2\right)}{\left(\mathrm{sh}\alpha_0\right)^2}, \tag{7}$$

при $\beta = 0$ $\sigma_\beta = \mathrm{p}\dfrac{\left(\mathrm{ch}\alpha - 1\right)2}{\left(\mathrm{sh}\alpha_0\right)^2}$.

Формулы (7) позволяют исследовать это взаимодействие, повышая математическую подготовку будущих специалистов-механиков.

Показательным в учебном процессе будет пример применения принципа суперпозиции. Принимая функцию напряжений в виде суммы функций (3) и (6), приходим к решению задачи для бесконечной пластины, ослабленной двумя круговыми отверстиями, контуры которых свободны от нагрузки, при всестороннем растяжении на бесконечности. Нормальные и касательные напряжения в точках пластины вычисляются по следующим формулам:

$$\sigma_\alpha = \mathrm{p}\left[1 - \left(\frac{\mathrm{sh}(\alpha)}{\mathrm{sh}(\alpha_0)}\right)^2\right];\ \sigma_\beta = \mathrm{p}\left[1 + \frac{1 + (\mathrm{ch}\alpha)^2 - 2\mathrm{ch}(\alpha) - \cos\beta}{(\mathrm{sh}\alpha_0)^2}\right];\ \tau_{\alpha\beta} = 0. \tag{8}$$

Из формул (8) следует, что на границе отверстий, где $\alpha = \pm\alpha_0$ $\sigma_\alpha = 0$; на бесконечности $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \mathrm{p}$; $\tau_{\alpha\beta} = 0$.

И наконец, в качестве задания для студентов можно предложить применительно к рассматриваемой выше задаче исследовать, например, функцию напряжений, представленную в виде ряда

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Phi}{\mathrm{h}}\right) = {} & \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{1,n}\mathrm{ch}\left((n+1)\alpha\right) + C_{3,n}\mathrm{ch}\left((n-1)\alpha\right)\right]\cos(n\beta) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\left[D_{1,n}\mathrm{ch}(\lambda_n\beta)\cos\beta + D_{3,n}\mathrm{sh}(\lambda_n\beta)\sin\beta\right]\cos(\lambda_n\alpha),\end{aligned} \tag{9}$$

где $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{\alpha_0}$.

Прямой подстановкой этой функции в выражение (1) необходимо проверить, что каждый член этой функции при $C_{1,n} = C_{3,n} = D_{1,n} = D_{3,n} = \mathrm{ap}$ удовлетворяет уравнению (1) тождественно.

При этом каждое слагаемое с коэффициентами $C_{1,n} = C_{3,n} = D_{1,n} = \mathrm{ap}$ задает на бесконечности (при $\alpha = 0, \beta = 0$) напряжения $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \mathrm{p}$, $\tau_{\alpha\beta} = 0$, то есть всестороннее растяжение. Слагаемые же с $D_{3,n} = \mathrm{ap}$ дают напряжения на бесконечности $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \tau_{\alpha\beta} = 0$.

Выводы

Перечисленные трудности самой теории упругости порождают соответствующие проблемы при подготовке специалистов в этой области. Решение их возможно на основе параллельного изучения математики и механики, значительно укрепляя междисциплинарные связи.

Некоторые идеи данной статьи могут быть обобщены и применимы для изучения других родственных между собой дисциплин, способствуя совершенствованию учебного процесса и его профилированию. ФГОС ВПО предусматривают возможность использования курсов по выбору, чем могут воспользоваться как преподаватели высших школ, так и их руководители.

Список литературы

1. *Карпов Г. Н.* Техническая механика : учебник для бакалавров по техническим направлениям. Калининград, 2010.

2. *Карпов Г. Н.* Практикум по статике и основам сопротивления материалов : учеб. пособие для студентов вузов по специальности 180101.65-Кораблестроение и направлению 111000.62-Рыболовство. Калининград, 2009.

3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

4. *Гурса Э.* Курс мат. анализа. М. ; Л., 1936. Т. 2.

5. *Суслов В. П., Качанов Ю. П., Спихтаренко В. П.* Строительная механика корабля и основы теории упругости. Л., 1972.

6. *Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М., 1961.

7. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. М. ; Л., 1950.

Об авторе

Геннадий Николаевич Карпов — канд. техн. наук, доц., Калининградский государственный технический университет.

E-mail: Karpovkgtu@yandex.ru

About the author

Dr Gennady Karpov, Associate Professor, Kaliningrad State Technical University.

E-mail: Karpovkgtu@yandex.ru