УДК 514.75

А. В. Кулешов

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

ОБОБЩЕННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА КОМПЛЕКСЕ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассматривается комплекс $K_{m(n-m+1)}$ m-мерных центрированных плоскостей в проективном пространстве P_n. Показано, что его фундаментальный объект 1-го порядка состоит из двух псевдотензоров. На рассматриваемом комплексе способом Лумисте заданы: 1) обобщенная аффинная связность, 2) нормальная линейная связность, 3) обобщенная билинейная связность.

Ключевые слова: проективное пространство, центрированная плоскость, связность.

§ 1. Фундаментальный объект комплекса $K_{m(n-m+1)}$

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I, J, K = \overline{1,n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \; dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A. \qquad (1.1)$$

Структурные уравнения проективной группы $GP(n)$ запишем в виде:

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \qquad (1.2)$$

$$D\omega_K^I = \omega_K^J \wedge \omega_J^I + \omega^J \wedge (-\delta_K^I \omega_J - \delta_J^I \omega_K), \qquad (1.3)$$

$$D\omega_I = \omega_I^K \wedge \omega_K . \qquad (1.4)$$

В пространстве P_n рассмотрим m-мерную центрированную плоскость $L_m^* = (L_m, C)$ $(1 \le m < n)$. Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$ $(a,b,c = \overline{1,m};\ \alpha,\beta,\gamma = \overline{m+1,n})$, помещая вершину A в центр C плоскости L_m^*, а вершины A_a — на плоскость L_m^*.

С учетом разбиения индексов уравнения (1.1) удобнее переписать в виде:

$$dA = \theta A + \omega^a A_a + \omega^\alpha A_\alpha , \qquad (1.5)$$

$$dA_a = \theta A_a + \omega_a^b A_b + \omega_a^\alpha A_\alpha + \omega_a A , \qquad (1.6)$$

$$dA_\alpha = \theta A_\alpha + \omega_\alpha^a A_a + \omega_\alpha^\beta A_\beta + \omega_\alpha A . \qquad (1.7)$$

Из формул (1.5) и (1.6) следуют уравнения стационарности плоскости L_m^*:

$$\omega^a = 0, \omega^\alpha = 0, \omega_a^\alpha = 0 .$$

Будем считать формы $\omega^a, \omega_a^\alpha$ базисными. Тогда формы ω^α будут линейными комбинациями базисных форм:

$$\omega^\alpha = \Lambda_a^\alpha \omega^a + \Lambda_\beta^{\alpha a} \omega_a^\beta . \qquad (1.8)$$

Это уравнения комплекса $K_{m(n-m+1)}$ (ср. [2]).

Найдем внешние дифференциалы базисных форм $\omega^a, \omega_a^\alpha$:

$$D\omega^a = \omega^b \wedge \theta_b^a + \omega_b^\alpha \wedge \theta_\alpha^{ab},\ D\omega_a^\alpha = \omega^b \wedge \theta_{ab}^\alpha + \omega_b^\beta \wedge \theta_{a\beta}^{\alpha b}, \quad (1.9)$$

где

$$\theta_b^a = \omega_b^a + \Lambda_b^\alpha \omega_\alpha^a,\ \theta_\alpha^{ab} = \Lambda_\alpha^{\beta b} \omega_\beta^a ,$$

$$\theta_{\beta a}^{\alpha b} = -\delta_\beta^\alpha \omega_a^b + \delta_a^b \omega_\beta^\alpha - \Lambda_\beta^{\alpha b} \omega_a ,\ \theta_{ab}^\alpha = -\Lambda_b^\alpha \omega_a .$$

Нам также понадобятся дифференциалы форм ω^α:

$$D\omega^\alpha = \omega^a \wedge \omega_a^\alpha + \Lambda_a^\beta \omega^a \wedge \omega_\beta^\alpha + \Lambda_\gamma^{\beta a} \omega_a^\gamma \wedge \omega_\beta^\alpha . \qquad (1.10)$$

Продолжим систему уравнений (1.8). Для этого продифференцируем ее с учетом уравнений (1.9—1.10):

$$\begin{gathered}(\Delta\Lambda_a^\alpha - \Lambda_b^\alpha \Lambda_a^\beta \omega_\beta^b + \Lambda_\beta^{\alpha b} \Lambda_a^\beta \omega_b) \wedge \omega^a + \\ + (\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} - \Lambda_b^\alpha \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_\gamma^b + \Lambda_\gamma^{\alpha b} \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_b) \wedge \omega_a^\beta - \omega^a \wedge \omega_a^\alpha = 0.\end{gathered} \tag{1.11}$$

Полученные уравнения можно разрешить по лемме Картана двумя основными способами [1]:

1-й способ — путем вынесения ω^a из выражения $\omega^a \wedge \omega_a^\alpha$:

$$\begin{gathered}(\Delta\Lambda_a^\alpha - \Lambda_b^\alpha \Lambda_a^\beta \omega_\beta^b + \Lambda_\beta^{\alpha b} \Lambda_a^\beta \omega_b + \omega_a^\alpha) \wedge \omega^a + \\ + (\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} - \Lambda_b^\alpha \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_\gamma^b + \Lambda_\gamma^{\alpha b} \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_b) \wedge \omega_a^\beta = 0.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Разрешая данное равенство по лемме Картана, получим:

$$\Delta\Lambda_a^\alpha - \Lambda_b^\alpha \Lambda_a^\beta \omega_\beta^b + \Lambda_\beta^{\alpha b} \Lambda_a^\beta \omega_b + \omega_a^\alpha = \Lambda_{ab}^\alpha \omega^b + \Lambda_{a\beta}^{\alpha b} \omega_b^\beta, \tag{1.13}$$

$$\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} - \Lambda_b^\alpha \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_\gamma^b + \Lambda_\gamma^{\alpha b} \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_b = \Lambda_{\beta b}^{\alpha a} \omega^b + \Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha a b} \omega_b^\gamma, \tag{1.14}$$

причем пфаффовы производные $\Lambda_{ab}^\alpha, \Lambda_{a\beta}^{\alpha b}$, $\Lambda_{\beta b}^{\alpha a}, \Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha a b}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\Lambda_{[ab]}^\alpha = 0, \ \Lambda_{a\beta}^{\alpha b} = \Lambda_{\beta a}^{\alpha b}, \ \Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha a b} = \Lambda_{\gamma\beta}^{\alpha b a}. \tag{1.15}$$

В самом деле, подставляя (1.13) и (1.14) в (1.12), получим

$$\Lambda_{ab}^\alpha \omega^b \wedge \omega^a + \Lambda_{a\beta}^{\alpha b} \omega_b^\beta \wedge \omega^a + \Lambda_{\beta b}^{\alpha a} \omega^b \wedge \omega_a^\beta + \Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha a b} \omega_b^\gamma \wedge \omega_a^\beta = 0,$$

откуда с учетом линейной независимости базисных форм следуют равенства (1.15).

Уравнения (1.13) удобно переписать в виде:

$$\Delta\Lambda_a^\alpha - \Lambda_b^\alpha \Lambda_a^\beta \omega_\beta^b + \Lambda_\beta^{\alpha b} \Lambda_a^\beta \omega_b = \Lambda_{ab}^\alpha \omega^b + \overline{\Lambda}_{a\beta}^{\alpha b} \omega_b^\beta, \tag{1.13'}$$

где

$$\overline{\Lambda}_{a\beta}^{\alpha b} = \Lambda_{a\beta}^{\alpha b} - \delta_a^b \delta_\beta^\alpha.$$

2-й способ — путем вынесения ω_a^α из выражения $\omega^a \wedge \omega_a^\alpha$:

$$(\Delta\Lambda_a^\alpha - \Lambda_b^\alpha \Lambda_a^\beta \omega_\beta^b + \Lambda_\beta^{\alpha a} \Lambda_b^\beta \omega_a) \wedge \omega^a +$$

$$+ (\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} - \Lambda_b^\alpha \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_\gamma^b - \Lambda_\beta^{\gamma a} \Lambda_\gamma^{\alpha b} \omega_b - \delta_\beta^\alpha \omega^a) \wedge \omega_a^\beta = 0.$$

Разрешая по лемме Картана, получим

$$\Delta\Lambda_a^\alpha - \Lambda_b^\alpha \Lambda_a^\beta \omega_\beta^b + \Lambda_\beta^{\alpha b} \Lambda_a^\beta \omega_b = \Lambda_{ab}^\alpha \omega^b + \Lambda_{a\beta}^{\alpha b} \omega_b^\beta; \quad (1.15)$$

$$\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} - \Lambda_b^\alpha \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_\gamma^b - \Lambda_\beta^{\gamma a} \Lambda_\gamma^{\alpha b} \omega_b - \delta_\beta^\alpha \omega^a = \Lambda_{\beta b}^{\alpha a} \omega^b + \Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha ab} \omega_b^\gamma, \quad (1.16)$$

причем пфаффовы производные $\Lambda_{ab}^\alpha, \Lambda_{a\beta}^{\alpha b}$, $\Lambda_{\beta b}^{\alpha a}, \Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha ab}$ удовлетворяют соотношениям (1.15).

Уравнения (1.16) удобно переписать в виде:

$$\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} - \Lambda_b^\alpha \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_\gamma^b + \Lambda_\gamma^{\alpha b} \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_b = \overline{\Lambda}_{\beta b}^{\alpha a} \omega^b + \Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha ab} \omega_b^\gamma, \quad (1.16')$$

где

$$\overline{\Lambda}_{\beta b}^{\alpha a} = \Lambda_{\beta b}^{\alpha a} + \delta_\beta^\alpha \delta_b^a.$$

Замечание. Оба приведенных способа являются эквивалентными, то есть приводят к одним и тем же следствиям.

Из полученных уравнений следует

Теорема 1.1. *Совокупность функций* $\Lambda = \{\Lambda_a^\alpha, \Lambda_\beta^{\alpha a}\}$ *образует геометрический объект, состоящий из двух псевдотензоров* [3].

Объект $\Lambda = \{\Lambda_a^\alpha, \Lambda_\beta^{\alpha a}\}$ называется фундаментальным объектом 1-го порядка комплекса $K_{m(n-m+1)}$.

§ 2. Расслоение, ассоциированное с комплексом

Из уравнений (1.2 — 1.4) следует, что с комплексом $K_{m(n-m+1)}$ ассоциируется главное расслоение $G_s(K)$ со структурными уравнениями (1.9) и следующими:

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega_b^\alpha \wedge \omega_\alpha^a + \omega^c \wedge (-\delta_b^a \omega_c - \delta_c^a \omega_b), \quad (2.1)$$

$$D\omega_\alpha^a = \omega_\alpha^b \wedge \omega_b^a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^a - \omega^a \wedge \omega_\alpha, \quad (2.2)$$

$$\begin{gathered} D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega^a \wedge (-\delta_\beta^\alpha \Lambda_a^\gamma \omega_\gamma - \Lambda_a^\alpha \omega_\beta) + \\ + \omega_a^\gamma \wedge (-\delta_\gamma^\alpha \omega_\beta^a - \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^{\delta a} \omega_\delta - \Lambda_\gamma^{\alpha a} \omega_\beta), \end{gathered} \quad (2.3)$$

$$D\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b + \omega_a^\alpha \wedge \omega_\alpha, \quad (2.4)$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^a \wedge \omega_a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta. \quad (2.5)$$

Базой главного расслоения $G_s(K)$ является комплекс $K_{m(n-m+1)}$, а типовым слоем — s-членная подгруппа стационарности G_s ($s = n(n+1) - m(n-m)$) плоскости L_m^*. Число s равно количеству форм $\omega_b^a, \omega_\beta^\alpha, \omega_\alpha^a, \omega_a, \omega_\alpha$. Структурные уравнения этой подгруппы получаются из (2.1—2.5) обращением в нуль базисных форм и имеют вид:

$$D\pi_b^a = \pi_b^c \wedge \pi_c^a, \; D\pi_\alpha^a = \pi_\alpha^b \wedge \pi_b^a + \pi_\alpha^\beta \wedge \pi_\beta^a,$$

$$D\pi_\beta^\alpha = \pi_\beta^\gamma \wedge \pi_\gamma^\alpha, \; D\pi_a = \pi_a^b \wedge \pi_b,$$

$$D\pi_\alpha = \pi_\alpha^\beta \wedge \pi_\beta + \pi_\alpha^a \wedge \pi_a,$$

где $\pi = \omega\big|_{\omega^a = 0,\, \omega_a^\alpha = 0}$.

§ 3. Обобщенная аффинная связность

Лемма 3.1. *Пусть* $\tilde\omega_1 = \omega_1 - \theta_1$, $\tilde\omega_2 = \omega_2 - \theta_2$. *Тогда*

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde\omega_1 \wedge \tilde\omega_2 + \omega_1 \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge \omega_2 - \theta_1 \wedge \theta_2.$$

Доказательство. Из условия имеем:

$$\begin{gathered} \tilde\omega_1 \wedge \tilde\omega_2 = (\omega_1 - \theta_1) \wedge (\omega_2 - \theta_2) = \\ = \omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge \theta_2 - \theta_1 \wedge \omega_2 + \theta_1 \wedge \theta_2. \end{gathered}$$

Отсюда получаем искомое равенство.

Зададим обобщенную аффинную связность [4] приемом Лумисте с помощью форм:

$$\tilde{\omega}^a = \omega^a - C^a_b\omega^b - C^{ab}_\alpha\omega^\alpha_b, \quad \tilde{\omega}^a_b = \omega^a_b - \Gamma^a_{bc}\omega^c - \Gamma^{ac}_{b\alpha}\omega^\alpha_c. \quad (3.1)$$

Найдем внешние дифференциалы этих форм. Используя уравнения (1.9, 2.1), получим:

$$D\tilde{\omega}^a = \omega^b \wedge \omega^a_b + \omega^b \wedge \Lambda^\alpha_b\omega^a_\alpha + \omega^\beta_b \wedge \Lambda^{\alpha b}_\beta\omega^a_\alpha - dC^a_b \wedge \omega^b -$$

$$-C^a_b(\omega^c \wedge \omega^b_c + \omega^c \wedge \Lambda^\alpha_c\omega^b_\alpha + \omega^\beta_c \wedge \Lambda^{\alpha c}_\beta\omega^b_\alpha) - dC^{ab}_\alpha \wedge \omega^\alpha_b - \quad (3.2)$$

$$-C^{ab}_\alpha((\delta^\alpha_\beta\omega^c_b - \delta^c_b\omega^\alpha_\beta + \Lambda^{\alpha c}_\beta\omega_b) \wedge \omega^\beta_b + \Lambda^\alpha_b\omega_a \wedge \omega^c),$$

$$D\tilde{\omega}^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \omega^\alpha_b \wedge \omega^a_\alpha + (\delta^a_b\omega_c + \delta^a_c\omega_b) \wedge \omega^c -$$

$$-d\Gamma^a_{bc} \wedge \omega^c - \Gamma^a_{bc}(\omega^d \wedge \omega^c_d + \omega^d \wedge \Lambda^\alpha_d\omega^c_\alpha + \omega^\beta_d \wedge \Lambda^{\alpha d}_\beta\omega^c_\alpha) -$$

$$-d\Gamma^{ac}_{b\alpha} \wedge \omega^\alpha_c - \Gamma^{ac}_{b\alpha}((\delta^\alpha_\beta\omega^d_c - \delta^d_c\omega^\alpha_\beta + \Lambda^{\alpha d}_\beta\omega_c) \wedge \omega^\beta_d + \Lambda^\alpha_d\omega_c \wedge \omega^d).$$

По лемме 3.1 имеем:

$$\omega^b \wedge \omega^a_b = \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^a_b + \omega^b \wedge (\Gamma^a_{bc}\omega^c + \Gamma^{ac}_{b\alpha}\omega^\alpha_c) +$$

$$+(C^b_c\omega^c + C^{bc}_\alpha\omega^\alpha_c) \wedge \omega^a_b - (C^b_c\omega^c + C^{bc}_\alpha\omega^\alpha_c) \wedge (\Gamma^a_{bc}\omega^c + \Gamma^{ac}_{b\alpha}\omega^\alpha_c),$$

$$\omega^c_b \wedge \omega^a_c = \tilde{\omega}^c_b \wedge \tilde{\omega}^a_c + \omega^c_b \wedge (\Gamma^a_{cd}\omega^d + \Gamma^{ad}_{c\alpha}\omega^\alpha_d) + (\Gamma^c_{bd}\omega^d + \Gamma^{cd}_{b\alpha}\omega^\alpha_d) \wedge \omega^a_c -$$

$$-(\Gamma^c_{bd}\omega^d + \Gamma^{cd}_{b\alpha}\omega^\alpha_d) \wedge (\Gamma^a_{ch}\omega^h + \Gamma^{ah}_{c\beta}\omega^\beta_h).$$

Подставляя эти выражения в формулы (3.2) для внешних дифференциалов $D\tilde{\omega}^a$ и $D\tilde{\omega}^a_b$, получим:

$$D\tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^a_b + \omega^b \wedge (\Delta C^a_b + \Lambda^\alpha_b\omega^a_\alpha - C^{ac}_\alpha\Lambda^\alpha_b\omega_c - C^a_c\Lambda^\alpha_b\omega^c_\alpha) +$$

$$+\omega^\alpha_b \wedge (\Delta C^{ab}_\alpha + \Lambda^{\beta b}_\alpha\omega^a_\beta - C^a_c\Lambda^{\beta b}_\alpha\omega^c_\beta + C^{ac}_\beta\Lambda^{\beta b}_\alpha\omega_c) +$$

$$+(\omega^b - C^b_c\omega^c - C^{bc}_\alpha\omega^\alpha_c) \wedge (\Gamma^a_{bc}\omega^c + \Gamma^{ac}_{b\alpha}\omega^\alpha_c),$$

$$D\tilde{\omega}^a_b = \tilde{\omega}^c_b \wedge \tilde{\omega}^a_c - (\Gamma^c_{bd}\omega^d + \Gamma^{cd}_{b\alpha}\omega^\alpha_d) \wedge (\Gamma^a_{ch}\omega^h + \Gamma^{ah}_{c\beta}\omega^\beta_h) +$$

$$+\omega^c \wedge (\Delta\Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{bd}\Lambda^\alpha_c\omega^d_\alpha + \Gamma^{ad}_{b\alpha}\Lambda^\alpha_c\omega_d - \delta^a_b\omega_c - \delta^a_c\omega_b) + \quad (3.3)$$

$$+\omega^\alpha_c \wedge (\Delta\Gamma^{ac}_{b\alpha} - \Gamma^a_{bd}\Lambda^{\beta c}_\alpha\omega^d_\beta + \Gamma^{ad}_{b\beta}\Lambda^{\beta c}_\alpha\omega_d - \delta^c_b\omega^a_\alpha).$$

Исходя из полученных уравнений, применим теорему Картана — Лаптева в обобщенном случае, а именно зададим поле объекта $C=\left\{C^a_b, C^{ab}_\alpha, \Gamma^a_{bc}, \Gamma^{ac}_{b\alpha}\right\}$ уравнениями

$$\Delta C^a_b + \Lambda^\alpha_b \omega^a_\alpha - C^{ac}_\alpha \Lambda^\alpha_b \omega_c - C^a_c \Lambda^\alpha_b \omega^c_\alpha = C^a_{bc}\omega^c + C^{ac}_{b\alpha}\omega^\alpha_c\,,$$

$$\Delta C^{ab}_\alpha + \Lambda^{\beta b}_\alpha \omega^a_\beta - C^a_c \Lambda^{\beta b}_\alpha \omega^c_\beta + C^{ac}_\beta \Lambda^{\beta b}_\alpha \omega_c = C^{ab}_{\alpha c}\omega^c + C^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\beta_c\,,$$

$$\Delta \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{bd}\Lambda^\alpha_c \omega^d_\alpha + \Gamma^{ad}_{b\alpha}\Lambda^\alpha_c \omega_d - \delta^a_b \omega_c - \delta^a_c \omega_b = \Gamma^a_{bcd}\omega^d + \Gamma^{ad}_{bc\alpha}\omega^\alpha_d\,,$$

$$\Delta \Gamma^{ac}_{b\alpha} - \Gamma^a_{bd}\Lambda^{\beta c}_\alpha \omega^d_\beta + \Gamma^{ad}_{b\beta}\Lambda^{\beta c}_\alpha \omega_d - \delta^c_b \omega^a_\alpha = \Gamma^{ac}_{b\alpha d}\omega^d + \Gamma^{acd}_{b\alpha\beta}\omega^\beta_d\,.$$

Подставляя эти дифференциальные уравнения в структурные уравнения (3.3), получим:

$$D\widetilde{\omega}^a = \widetilde{\omega}^b \wedge \widetilde{\omega}^a_b + Q^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + Q^{ac}_{b\alpha}\omega^b \wedge \omega^\alpha_c + Q^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\alpha_b \wedge \omega^\beta_c\,,$$

$$D\widetilde{\omega}^a_b = \widetilde{\omega}^c_b \wedge \widetilde{\omega}^a_c + R^a_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + R^{ad}_{bc\alpha}\omega^c \wedge \omega^\alpha_d + R^{acd}_{b\alpha\beta}\omega^\alpha_c \wedge \omega^\beta_d\,, \quad (3.4)$$

где

$$Q^a_{bc} = C^a_{[bc]} + (\delta^d_{[b} - C^d_{[b})\Gamma^a_{dc]}\,,$$

$$Q^{ac}_{b\alpha} = C^{ac}_{b\alpha} - C^{ac}_{\alpha b} + (\delta^d_b - C^d_b)\Gamma^{ac}_{d\alpha} + C^{dc}_\alpha \Gamma^a_{db}\,,$$

$$Q^{abc}_{\alpha\beta} = C^a\left[{}^{bc}_{\alpha\beta}\right] - C^d\left[{}^{c}_{\alpha}\Gamma^{ab}_{d\beta}\right],$$

$$R^a_{bcd} = \Gamma^a_{b[cd]} - \Gamma^h_{b[c}\Gamma^a_{hd]}\,,$$

$$R^{ad}_{bc\alpha} = \Gamma^{ad}_{bc\alpha} - \Gamma^{ad}_{b\alpha c} - \Gamma^h_{bc}\Gamma^{ad}_{h\alpha} + \Gamma^{hd}_{b\alpha}\Gamma^a_{hc}\,,$$

$$R^{acd}_{b\alpha\beta} = \Gamma^a_b\left[{}^{cd}_{\alpha\beta}\right] - \Gamma^h_b\left[{}^{c}_{\alpha}\Gamma^{ad}_{h\beta}\right].$$

Квадратные скобки обозначают альтернирование по крайним индексам или парам индексов в них.

Утверждение. *Система величин* $C=\left\{C^a_b, C^{ab}_\alpha, \Gamma^a_{bc}, \Gamma^{ac}_{b\alpha}\right\}$ *задает связность, называемую обобщенной аффинной связностью, причем формы* (3.1) *этой связности удовлетворяют структурным уравнениям* (3.4). *Объект C образует геометрический объект лишь вместе с фундаментальным объектом* Λ *комплекса* $K_{m(n-m+1)}$.

§ 4. Нормальная линейная связность

Зададим нормальную линейную связность приемом Лумисте с помощью форм

$$\widetilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta b}\omega^{b} - \Gamma^{\alpha b}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{b}\,. \tag{4.1}$$

Найдем внешние дифференциалы этих форм, используя уравнения (2.3):

$$\begin{aligned} D\widetilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} &= \omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{a}\wedge(d\Gamma^{\alpha}_{\beta a} - \delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{\gamma}_{a}\omega_{\gamma} - \Lambda^{\alpha}_{a}\omega_{\beta} + \\ &+ \Gamma^{\alpha b}_{\beta\gamma}\Lambda^{\gamma}_{a}\omega_{b} - \Gamma^{\alpha}_{\beta b}\omega^{b}_{a} - \Gamma^{\alpha}_{\beta b}\Lambda^{\alpha}_{a}\omega^{b}_{\alpha}) + \\ &+ \omega^{\gamma}_{a}\wedge(d\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{a}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{\delta a}_{\gamma}\omega_{\delta} - \Lambda^{\alpha a}_{\gamma}\omega_{\beta} - \\ &- \Gamma^{\alpha}_{\beta b}\Lambda^{\beta a}_{\gamma}\omega^{b}_{\beta} + \Gamma^{\alpha b}_{\beta\gamma}\omega^{a}_{b} - \Gamma^{\alpha a}_{\beta\delta}\omega^{\delta}_{\gamma} + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\delta}\Lambda^{\delta c}_{\gamma}\omega_{b}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

По лемме 3.1 имеем:

$$\begin{gathered} \omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma} = \widetilde{\omega}^{\gamma}_{\beta}\wedge\widetilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma} + (\Gamma^{\gamma}_{\beta b}\omega^{b} + \Gamma^{\gamma b}_{\beta\delta}\omega^{\delta}_{b})\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma} + \\ + \omega^{\gamma}_{\beta}\wedge(\Gamma^{\alpha}_{\gamma b}\omega^{b} + \Gamma^{\alpha b}_{\gamma\delta}\omega^{\delta}_{b}) - (\Gamma^{\gamma}_{\beta b}\omega^{b} + \Gamma^{\gamma b}_{\beta\delta}\omega^{\delta}_{b})\wedge(\Gamma^{\alpha}_{\gamma c}\omega^{c} + \Gamma^{\alpha c}_{\gamma\varepsilon}\omega^{\varepsilon}_{c}). \end{gathered}$$

Подставим результат в уравнения (4.2):

$$\begin{aligned} D\widetilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} &= \widetilde{\omega}^{\gamma}_{\beta}\wedge\widetilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{a}\wedge(\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta a} - \delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{\gamma}_{a}\omega_{\gamma} - \Lambda^{\alpha}_{a}\omega_{\beta} + \\ &+ \Gamma^{\alpha b}_{\beta\gamma}\Lambda^{\gamma}_{a}\omega_{b} - \Gamma^{\alpha}_{\beta b}\Lambda^{\alpha}_{a}\omega^{b}_{\alpha}) + \omega^{\gamma}_{a}\wedge(\Delta\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{a}_{\beta} - \\ &- \delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{\delta a}_{\gamma}\omega_{\delta} - \Lambda^{\alpha a}_{\gamma}\omega_{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta b}\Lambda^{\beta a}_{\gamma}\omega^{b}_{\beta} + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\delta}\Lambda^{\delta c}_{\gamma}\omega_{b}) - \\ &- (\Gamma^{\gamma}_{\beta b}\omega^{b} + \Gamma^{\gamma b}_{\beta\delta}\omega^{\delta}_{b})\wedge(\Gamma^{\alpha}_{\gamma c}\omega^{c} + \Gamma^{\alpha c}_{\gamma\varepsilon}\omega^{\varepsilon}_{c}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Исходя из этих уравнений, применим теорему Картана — Лаптева в случае главного расслоения нормальных линейных реперов, а именно: пусть $\Gamma^{\alpha}_{\beta a}$ и $\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta a}-\delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{\gamma}_{a}\omega_{\gamma}-\Lambda^{\alpha}_{a}\omega_{\beta}+\Gamma^{\alpha b}_{\beta\gamma}\Lambda^{\gamma}_{a}\omega_{b}-\Gamma^{\alpha}_{\beta b}\Lambda^{\alpha}_{a}\omega^{b}_{\alpha}=\Gamma^{\alpha}_{\beta ab}\omega^{b}+\Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma}_{b},$$

$$\begin{gathered}\Delta\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}-\delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{a}_{\beta}-\delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{\delta a}_{\gamma}\omega_{\delta}-\Lambda^{\alpha a}_{\gamma}\omega_{\beta}-\Gamma^{\alpha}_{\beta b}\Lambda^{\beta a}_{\gamma}\omega^{b}_{\beta}+\\+\Gamma^{\alpha a}_{\beta\delta}\Lambda^{\delta c}_{\gamma}\omega_{b}=\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma b}\omega^{b}+\Gamma^{\alpha ab}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta}_{b}.\end{gathered}\tag{4.4}$$

Подставляя их в структурные уравнения (4.4), получим

$$D\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta}=\tilde{\omega}^{\gamma}_{\beta}\wedge\tilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma}+R^{\alpha}_{\beta bc}\omega^{b}\wedge\omega^{c}+R^{\alpha c}_{\beta b\gamma}\omega^{b}\wedge\omega^{\gamma}_{c}+R^{\alpha bc}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\gamma}_{b}\wedge\omega^{\delta}_{c},\tag{4.5}$$

где

$$R^{\alpha}_{\beta bc}=\Gamma^{\alpha}_{\beta[bc]}-\Gamma^{\gamma}_{\beta[b}\Gamma^{\alpha}_{\gamma c]},$$

$$R^{\alpha c}_{\beta b\gamma}=\Gamma^{\alpha c}_{\beta b\gamma}-\Gamma^{\delta}_{\beta b}\Gamma^{\alpha c}_{\delta\gamma}+\Gamma^{\delta c}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\delta b}-\Gamma^{\alpha c}_{\beta\gamma b},$$

$$R^{\alpha bc}_{\beta\gamma\delta}=\Gamma^{\alpha}_{\beta}\begin{bmatrix}bc\\\gamma\delta\end{bmatrix}+\Gamma^{\varepsilon}_{\beta}\begin{bmatrix}b&&c\\\gamma&\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon}&\delta\end{bmatrix}$$

Утверждение. *Объект* $\Gamma=\{\Gamma^{\alpha}_{\beta a},\ \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$ *задает связность, называемую нормальной линейной связностью, причем формы* (4.1) *этой связности удовлетворяют структурным уравнениям* (4.5).

§ 5. Обобщенная билинейная связность

Зададим обобщенную билинейную связность приемом Лумисте с помощью форм плоскостной и нормальной линейных связностей $\tilde{\omega}^{a}_{b}$ и $\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta}$, определяемых равенствами (3.1_2) и (4.1), а также форм

$$\tilde{\omega}^{\alpha}_{a}=\omega^{\alpha}_{a}-C^{\alpha}_{ab}\omega^{b}-C^{\alpha b}_{a\beta}\omega^{\beta}_{b}.\tag{5.1}$$

Найдем внешние дифференциалы форм $\tilde{\omega}^{\alpha}_{a}$:

$$\begin{gathered}D\tilde{\omega}^{\alpha}_{a}=\omega^{b}_{a}\wedge\omega^{\alpha}_{b}+\omega^{\beta}_{a}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta}+\omega^{\beta}_{b}\wedge(dC^{\alpha b}_{a\beta}+\\+C^{\alpha c}_{a\beta}\omega^{b}_{c}-C^{\alpha b}_{a\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta}+C^{\alpha c}_{a\gamma}\Lambda^{\gamma b}_{\beta}\omega_{c}-\Lambda^{\alpha b}_{\beta}\omega_{a}-C^{\alpha}_{ac}\Lambda^{\gamma b}_{\beta}\omega^{c}_{\gamma})+\\+\omega^{b}\wedge(dC^{\alpha}_{ab}-\Lambda^{\alpha}_{b}\omega_{a}-C^{\alpha}_{ac}\omega^{c}_{b}-C^{\alpha}_{ac}\Lambda^{\beta}_{b}\omega^{c}_{\beta}+C^{\alpha c}_{a\beta}\Lambda^{\beta}_{b}\omega_{c}).\end{gathered}\tag{5.2}$$

По лемме 3.1 имеем:

$$\omega_a^b \wedge \omega_b^\alpha = \tilde{\omega}_a^b \wedge \tilde{\omega}_b^\alpha + \omega_a^b \wedge (C_{bc}^\alpha \omega^c + C_{b\beta}^{\alpha c} \omega_c^\beta) +$$
$$+(\Gamma_{ac}^b \omega^c + \Gamma_{a\beta}^{bc} \omega_c^\beta) \wedge \omega_b^\alpha - (\Gamma_{ac}^b \omega^c + \Gamma_{a\beta}^{bc} \omega_c^\beta) \wedge (C_{bd}^\alpha \omega^d + C_{b\gamma}^{\alpha d} \omega_d^\gamma),$$
$$\omega_a^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha = \tilde{\omega}_a^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta^\alpha + (C_{a\gamma}^{\beta b} \omega_b^\gamma + C_{ab}^\beta \omega^b) \wedge \omega_\beta^\alpha + \qquad (5.3)$$
$$+\omega_a^\beta \wedge (\Gamma_{\beta b}^\alpha \omega^b + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha b} \omega_b^\gamma) - (C_{a\gamma}^{\beta b} \omega_b^\gamma + C_{ab}^\beta \omega^b) \wedge (\Gamma_{\beta c}^\alpha \omega^c + \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha c} \omega_c^\delta).$$

Подставим (5.3) в (5.2):

$$D\tilde{\omega}_a^\alpha = \tilde{\omega}_a^b \wedge \tilde{\omega}_b^\alpha + \tilde{\omega}_a^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta^\alpha + (-\Gamma_{ab}^d C_{dc}^\alpha - C_{ab}^\beta \Gamma_{\beta c}^\alpha)\omega^b \wedge \omega^c +$$
$$+(-C_{ab}^\delta \Gamma_{\delta\beta}^{\alpha c} - \delta_a^c \Gamma_{\beta b}^\alpha + C_{a\beta}^{\gamma c} \Gamma_{\gamma b}^\alpha + \Gamma_{a\beta}^{dc} C_{db}^\alpha - \Gamma_{ab}^d C_{d\beta}^{\alpha c} + \delta_\beta^\alpha \Gamma_{ac}^b)\omega^b \wedge \omega_c^\beta +$$
$$+(\delta_a^b \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha c} - C_{a\beta}^{\delta b} \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha c} - \Gamma_{a\beta}^{db} C_{d\gamma}^{\alpha c})\omega_b^\beta \wedge \omega_c^\gamma +$$
$$+\omega_b^\beta \wedge (\Delta C_{a\beta}^{\alpha b} + \Gamma_{a\beta}^{cb} \omega_c^\alpha + C_{a\gamma}^{\alpha c} \Lambda_\beta^{\gamma b} \omega_c - \Lambda_\beta^{\alpha b} \omega_a - C_{ac}^\alpha \Lambda_\beta^{\gamma b} \omega_\gamma^c) +$$
$$+\omega^b \wedge (\Delta C_{ab}^\alpha + \Gamma_{ab}^c \omega_c^\alpha - \Lambda_b^\alpha \omega_a - C_{ac}^\alpha \Lambda_b^\beta \omega_\beta^c + C_{a\beta}^{\alpha c} \Lambda_b^\beta \omega_c).$$

Пусть величины C_{ab}^α, $C_{a\beta}^{\alpha b}$ удовлетворяют сравнениям

$$\Delta C_{a\beta}^{\alpha b} + C_{a\gamma}^{\alpha c} \Lambda_\beta^{\gamma b} \omega_c - \Lambda_\beta^{\alpha b} \omega_a - C_{ac}^\alpha \Lambda_\beta^{\gamma b} \omega_\gamma^c \equiv 0,$$

$$\Delta C_{ab}^\alpha - \Lambda_b^\alpha \omega_a - C_{ac}^\alpha \Lambda_b^\beta \omega_\beta^c + C_{a\beta}^{\alpha c} \Lambda_b^\beta \omega_c \equiv 0.$$

Тогда из обобщенной теоремы Картана — Лаптева следует

Утверждение. *Объект* $\{\Gamma_{bc}^a, \Gamma_{b\alpha}^{ac}, \Gamma, C_{a\beta}^{\alpha b}, C_{ab}^\alpha\}$ *задает обобщенную билинейную связность.*

Список литературы

1. *Белова О.О.* Тензор кривизны связности в расслоении над грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 40. Калининград, 2009. С. 18—28.
2. *Близникас В.И.* Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Тр. геом. семинара. ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 113—133.
3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.
4. *Шевченко Ю.И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

A. Kuleshov

GENERALIZED CONNECTIONS ON THE COMPLEX
OF CENTERED PLANES IN PROJECTIVE SPACE

Complex of centered planes in projective space is investigated. It is shown, that its fundamental object of the 1st order is pseudotensor. On this complex the following connections are given: 1) generalized affine connection, 2) normal affine connection, 3) generalized bilinear connection.

УДК 574.76

В. С. Малаховский

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ КОВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ К ОБОБЩЕННЫМ СИМВОЛАМ КРОНЕКЕРА

Показано, что ковариантные дифференциалы символов Кронекера $\delta^I_J, \delta^i_j, \delta^\alpha_\beta$ $\left(I, J, K = \overline{1,n};\ \ i, j, k = \overline{1,m};\right.$ $\left.\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1,n}\right)$ — тождественные нули, а ковариантное дифференцирование безындексных нулей, рассматриваемых как объекты $\delta^\alpha_i, \delta^i_\alpha$, не имеет смысла. Использование такого дифференцирования приводит к некорректным результатам.

Ключевые слова: дифференциал, обобщенные символы Кронекера, распределение, линейный элемент, аффинная связность.

В работах [1—3] обобщенные символы Кронекера δ^i_J, δ^α_J используются при исследовании аффинной связности А. В. Столярова [4], ассоциированной с распределением плоскостей.