УДК 517.77

О ПРОСТРАНСТВЕ КОНФОРМНО-КИЛЛИНГОВЫХ ФОРМ

С.Е. Степанов, И.И. Цыганок

(Владимирский государственный педагогический университет)

В работе рассматривается векторное пространство конформно-киллинговых p-форм $\mathbf{T}^p(M, \mathbf{R})$ на m-мерном римановом многообразии M [1, 2]. Доказана теорема, согласно которой на римановом многообразии M постоянной ненулевой секционной кривизны векторные пространства $\mathbf{T}^p(M, \mathbf{R})$ и $\mathbf{T}^{m-p}(M, \mathbf{R})$ являются изоморфными [3]. Пространство $\mathbf{T}^p(M, \mathbf{R})$ рассматривается также на многообразиях нулевой и отрицательной секционных кривизн.

1. Рассмотрим m-мерное риманово многообразие M с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Обозначим через $\Lambda^p M$ векторное расслоение p-форм на M. Действие ортогональной группы O(m) на тензор $\nabla\omega$ для $\omega \in C^\infty \Lambda^p M$ определяет разложение этого тензора на части, соответствующие неприводимым компонентам этого действия [4] : $\nabla\omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$ так, что условие $\Omega_1 = 0$ определяет замкнутую p-форму, условие $\Omega_2 = 0$ выделяет козамкнутую p-форму и, наконец, условие $\Omega_3 = 0$ выделяет конформно киллингову p-форму ω. В соответствии с этим определяются три векторных подпространства пространства дифференциальных p-форм $\Omega^p(M)$ на M. Это будут подпространства замкнутых $\mathbf{D}^p(M, \mathbf{R})$, козамкнутых $\mathbf{F}^p(M, \mathbf{R})$ и конформно-киллинговых $\mathbf{T}^p(M, \mathbf{R})$ p-форм.

Условие $\Omega_2 = \Omega_3 = 0$ характеризует p-форму ω как киллинговую. В свою очередь, условие $\Omega_1 = \Omega_3 = 0$ выделяет замкнутую конформно-киллинговую p-форму, которую назовём плоской. Плоские p-формы образуют на M подпространство $\mathbf{P}^p(M, \mathbf{R})$ пространства $\Omega^p(M, \mathbf{R})$. Свойства этих форм мы рассмотрели в работах [5-7]. Ещё один класс состоит из p-форм, выделяемых условием $\Omega_1 = \Omega_3 = 0$ и образующих подпространство $\mathbf{H}^p(M, \mathbf{R})$ пространства $\Omega^p(M, \mathbf{R})$. Эти формы носят название гармонических (см., напр., [8]).

2. Для любой точки $x \in M$ невырожденная квадратичная форма g_x определяет канонический изоморфизм $g_x : T_x^{(p,q)}M \to T_x^{(r,s)}M$ между тензорными пространствами $T_x^{(p,q)}M$ и $T_x^{(r,s)}M$ с $r + s = p + q$, позволяющий нам в дальнейшем “игнорировать” вариантность.

Выберем локальную ориентацию M и обозначим через η форму объёма многообразия M, полагая $\eta = \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ в координатной окрестности $U \subset M$ с локальной системой координат $x^1, \dots x^m$, согласованной с локальной ориентацией M. Тогда можно определить для любого числа p ($0 \le p \le m$) оператор Ходжа $*$, как единственный локальный изоморфизм векторных расслоений $*$:

$\Lambda^p M \to \Lambda^{m-p} M$, для которого $\omega\wedge(* \omega') = g(\omega,\omega')\,\eta$ при всех $\omega, \omega' \in C^\infty\Lambda^p T_x^* M$ и $x \in M$. Оператор Ходжа обладает следующими свойствами

$$*^2 = (-1)^{p(m-p)}\, \mathrm{id}_{\Lambda^p M}, \quad g(\omega,*\omega') = (-1)^{p(m-p)}\, g(*\omega, \omega')$$

для любых $\omega \in C^\infty\Lambda^p M$ и $\omega' \in C^\infty\Lambda^{m-p} M$.

Внешний дифференциал $d : C^\infty\Lambda^p M \to C^\infty\Lambda^{m-p} M$ и формально сопряжённый ему оператор кодифференцирования d^* на локально ориентированном римановом многообразии M связаны следующим равенством: $d^* = - * \circ d \circ *$. В результате для любой p-формы $\omega \in C^\infty\Lambda^p M$ имеем

$$*(d^* \omega) = - d (*\omega) ; \quad d^* (*\omega) = - * (d\omega). \qquad (1)$$

Отсюда, в частности, выводится правило построения козамкнутых форм. Для этого надо взять точную форму $\omega = d\omega'$ и подействовать на неё оператором Ходжа $*$.

Если принять во внимание линейность операторов d и d^*, то можно сделать вывод о том, что на римановом многообразии M пространства $\mathbf{F}^{m-p}(M, \mathbf{R})$ и $\mathbf{D}^p(M, \mathbf{R})$ являются $*$ - изоморфными**.** Отсюда в качестве следствия вытекает хорошо известный факт $*$-изоморфизма $\mathbf{R}$-модулей $\mathbf{H}^p(M, \mathbf{R})$ и $\mathbf{H}^{m-p}(M, \mathbf{R})$. Этому факту мы нашли аналог, установив $*$-изоморфизм $\mathbf{R}$ - модулей $\mathbf{T}^p(M, \mathbf{R})$ и $\mathbf{T}^{m-p}(M, \mathbf{R})$ в случае риманова многообразия M постоянной секционной кривизны. Предварительно докажем, что справедлива

Теорема 1. *На m - мерном римановом многообразии M* $\mathbf{R}$ *- модули плоских p -форм* $\boldsymbol{P}^p(M, \mathbf{R})$ *и киллинговых (m - p) - форм* $\boldsymbol{K}^{m-p}(M, \mathbf{R})$ *являются* $*$*- изоморфными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем ω произвольной плоской p-формой, т. е.

$$\nabla \omega = \frac{1}{m-p+1}\, g \,\Box\, d^*\omega, \qquad (1)$$

где $(g \,\Box\, d^* \omega)_{k i_1 i_2 \dots i_p} = -p g_{k[i_1} \nabla^j \omega_{|j| i_2 \dots i_p]}$. Выберем локальную ориентацию риманова многообразия M и обозначим через η его форму объёма , тогда для (m - p) - формы $*\omega$ выполняется равенство

$$(\nabla_X *\omega)(X_{p+1}, \dots, X_m) =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!(m-p+1)} \sum_{i_2 \dots i_p}^{m} \eta(X, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, X_{p+1}, \dots, X_v)(d^*\omega)(e_{i_2}, \dots, e_{i_p}),$$

а потому $\nabla *\omega \in C^\infty \Lambda^{m-p+1} M$ и , следовательно, ω - киллинговая (m - p) - форма.

Обратно, пусть ω - киллинговая p - форма, т. е. $d\omega = (p+1)\nabla\omega$, тогда контравариантные компоненты (m - p) - формы $*\omega$ будут удовлетворять равенству

$$\nabla_j (*\omega)^{i_{p+1} \dots i_m} = \eta^{i_1 \dots i_p\, i_{p+1} \dots i_m} \nabla_{[j}\, \omega_{i_1 \dots i_p]},$$

где $1 \le i_1 < \dots < i_p \le m$; $1 \le i_{p+1} < \dots < i_m \le m$; $j \ne i_1, \dots, i_p$ и при этом $i_a \ne i_\alpha$ для $a = 1, \dots, p$ и $\alpha = p+1, \dots, m$. В этом случае $\nabla_j (*\omega)^{i_{p+1}\dots i_m} = 0$ для всех $j \ne i_{p+1}, \dots, i_m$. Поскольку $*\omega$ - кососимметрическая (m - p) - форма, то все индексы её компоненты $(*\omega)^{i_{p+1}\dots i_m}$ равноправны. На этом основании рассмотрим случай, когда $i_{p+1} = j$. Зафиксируем значения индексов $i_{p+2}, \dots, i_m$ так, что $1 \le i_{p+2} < \dots < i_m \le m$, тогда значения для индекса $i_{p+1} = j$ можно будет выбрать p + 1 способом из оставшихся p + 1 чисел среди 1, ... , m. Наконец, значения индексов $i_1, \dots, i_p$, таких, что $1 \le i_1 < \dots < i_p \le m$ определяются однозначно, поскольку на них придётся уже ровно p чисел среди 1, ... , m. В результате получим равенство

$$\nabla_j (*\omega)^{j i_2 \dots i_m} = \eta^{i_1 \dots i_p j i_{p+2} \dots i_m} \nabla_{[j} \omega_{i_1 \dots i_p]},$$

где, как в левой, так и в правой частях отсутствует суммирование. Причём для тех же самых значений индексов $i_{p+2}, \dots, i_m$, но уже другого значения индекса $i_{p+1} = k$ будем иметь

$$\eta^{l_1 \dots l_p k i_{p+2} \dots i_m} \nabla_{[k} \omega_{l_1 \dots l_p]} = \eta^{i_1 \dots i_p j i_{p+2} \dots i_m} \nabla_{[j} \omega_{i_1 \dots i_p]}$$

поскольку здесь $[k\, l_1 \dots l_p]$ и $[j\, i_1 \dots i_p]$ - это два упорядоченных набора из одних и тех же натуральных p + 1 чисел, выбранных в промежутке от 1 до m. В результате

$$\nabla_j (*\omega)^{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_m} = \frac{1}{p+1} \{ (\delta^{i_{p+1}}_j \eta^{i_1 \dots i_p l i_{p+2} \dots i_m} -$$

$$- \delta^{i_{p+2}}_j \eta^{i_1 \dots i_p l i_{p+1} i_{p+3} \dots i_m} - \dots - \delta^{i_m}_j \eta^{i_1 \dots i_p l i_{p+2} \dots i_{m-1} i_{p+1}}) \nabla_{[l} \omega_{i_1 \dots i_p]} \},$$

а потому $*\omega$ - плоская (m - p) - форма

*Замечание***.** Непосредственно проверяется, что сформулированный и доказанный выше результат не зависит от сигнатуры метрики g. По крайней мере, в одну сторону это было нами доказано в [7].

3. Как было установлено в [8], любая p - форма ω , удовлетворяющая уравнению

$$\nabla \omega = \frac{1}{p+1} d\omega + \frac{1}{m-p+1} g \,\Box\, d^* \omega , \qquad (2)$$

является конформно - киллинговой. Выберем произвольные киллинговую ω' и плоскую ω'' p - формы, которые удовлетворяют известным равенствам:

$$\nabla \omega' = \frac{1}{p+1} d\omega' , \; d^* \omega' = 0 ; \qquad (3)$$

$$\nabla \omega'' = \frac{1}{m-p+1} g \,\Box\, d^* \omega'' , \; d \omega'' = 0 . \qquad (4)$$

Тогда, как это непосредственно проверяется на основании равенств (3) и (4), p-форма $\omega = \omega' + \omega''$ будет удовлетворять уравнению (2) и, следовательно, являться конформно - киллинговой.

Лемма. *На m - мерном римановом многообразии M сумма произвольных киллинговой и плоской p - форм ($0 < p < m$) является конформно - киллинговой p-формой.*

Как это доказано в работах Тачибаны и Кашивады [1] и [2], на римановом многообразии M постоянной ненулевой секционной кривизны каждая конформно- киллинговая p - форма представима в виде суммы некоторых киллинговой и замкнутой конформно - киллинговой (т. е. плоской) p-форм.

Следствие 1. *На m-мерном римановом многообразии M постоянной ненулевой секционной кривизны $\boldsymbol{T}^p(M, \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{K}^p(M, \boldsymbol{R}) \oplus \boldsymbol{P}^p(M, \boldsymbol{R})$.*

На основании теоремы 1, леммы и следствия 1 может быть сформулирована

Теорема 2. *На m - мерном римановом многообразии M постоянной ненулевой секционной кривизны $\boldsymbol{R}$ - модули $\boldsymbol{T}^p(M, \boldsymbol{R})$ и $\boldsymbol{T}^{m-p}(M, \boldsymbol{R})$ являются* *****- *изоморфными.*

4. Рассмотрим локально плоское риманово многообразие M, для каждой точки x которого всегда можно подобрать окрестность U, изометричную открытому подмножеству евклидова пространства, с локальной декартовой системой координат $x^1, \dots, x^m$. Пусть ω будет плоской p-формой, тогда согласно уравнений (2.2) работы [6] форма $d^*\omega$ из уравнения (1) должна подчиняться условию $\partial_k (d^*\omega)_{i_2 \dots i_m} = 0$, где $\partial_k = \partial/\partial x^k$. А потому в этой окрестности (p - 1) - форма $d^*\omega$ имеет постоянные компоненты $A_{i_2 \dots i_p}$. В свою очередь, условия интегрируемости уравнений (1), имеющие вид тождеств Риччи, относительно той же системы координат перепишутся так:

$$\partial_j \partial_k \omega_{i_1 \dots i_p} = \partial_k \partial_j \omega_{i_1 \dots i_p} .$$

В этом случае интегралы самих уравнений (1) будут иметь в U следующий вид:

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = x_{[i_1} A_{i_2 \dots i_p]} + B_{i_1 \dots i_p} , \qquad (5)$$

где $B_{i_1 \dots i_p}$ суть постоянные компоненты некоторой p-формы. Здесь же на основании теоремы 1 заключаем, что локальными компонентами в координатной окрестности U киллинговой (m - p) - формы ω' будут

$$\omega'_{i_{p+1} \dots i_m} = (*\omega)_{i_{p+1} \dots i_m} = x^l A'_{l i_{p+1} \dots i_m} + B'_{i_{p+1} \dots i_m} .$$

Теорема 3. *Пусть ω и ω' суть плоская и киллинговая p-формы на m-мерном локально плоском (псевдо) римановом многообразии M. Тогда существует окрестность U каждой точки $x \in M$, где компоненты форм имеют следующий вид:*

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = x_{[i_1} A_{i_2 \dots i_p]} + B_{i_1 \dots i_p} , \quad \omega'_{i_1 \dots i_p} = x^l A'_{l i_1 \dots i_p} + B'_{i_1 \dots i_p} ,$$

для декартовой системы координат $x^1, \dots, x^m$ в U и постоянных компонент $A'_{l i_1 \dots i_p}$, $B'_{i_1 \dots i_p}$, $A_{i_2 \dots i_p}$ и $B_{i_1 \dots i_p}$ кососимметрических тензоров на U.

5. Определим на M симметрическую 2- форму $\varphi' = \varphi - 1/p(\operatorname{trace} \varphi)\, g$ для

$$\varphi_{ij} = g^{l_2 k_2} \dots g^{l_p k_p}\, \omega_{i l_2 \dots l_p}\, \omega_{j k_2 \dots k_p} = \omega_{i l_2 \dots l_p}\, \omega_j{}^{l_2 \dots l_p} \qquad (6)$$

в произвольной координатной окрестности U многообразия M. Полагаем ω конформно-киллинговой p-формой, тогда на основании равества (2) можно убедится, что форма φ' удовлетворяет уравнению $(\nabla_X \varphi')(X, X) = 0$ для любого $X \in C^\infty TM$ и является, следовательно, симметрической киллинговой 2-формой. Заметим, что аналогичный факт был нами установлен ранее [5] только для плоских (или по другой терминологии замкнутых конформно-киллинговых) p-форм. Из доказанных в [5] утверждений вытекает

Следствие 2. *Если m-мерное замкнутое ориентированное риманово многообразие M отрицательной секционной кривизны несёт конформно-киллинговую p-форму* ω *для* $1 \le p \le m-1$, *то*

$$\omega_{ij_2 \dots j_p} \omega_j^{j_2 \dots j_p} = \frac{p!}{m} |\omega|^2 g_{ij}$$

для $|\omega|^2 = const$. *В частности, для m = 2n и p = 2 многообразие M будет почти эрмитовым с фундаментальной 2-формой* $(\sqrt{2m}\ /\omega/)^{-1}\,\omega$.

Библиографический список

1. *Tachibana S.* On conformal killing tensor in a Riemannian space // Tohoku Math. J. 1969. Vol. 21. P. 56-64.
2. *Kashiwada T.* On conformal Killing tensor // Natural Science Report. Ochanomizu University. 1968. Vol. 19, № 2. P. 67-74.
3. *Stepanov S.E.* A class of closed forms and special Maxwell equations // Conference on Differential Geometry : Abstracts. Budapest, 1996. P. 113.
4. *Stepanov S.E.* The seven classes of almost symplectic strutures // Webs and quasigroups. Tver': Tver'State University, 1992. P. 93-96.
5. *Степанов С.Е.* О применении одной теоремы П.А.Широкова в Технике Бохнера // Изв. вузов. Мат., 1996. № 9. С. 53-59.
6. *Степанов С.Е.* Плоские дифференциальные формы // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1995. Вып. 26. С. 84-89.
7. *Степанов С.Е.* Плоские дифференциальные формы и специальные уравнения Максвелла // Там же, 1996. Вып. 27. С. 107-111.
8. Hoge W.V.D. The theory and applications of harmonic integrals. Cambridge University Press, 1952.
9. *Yamaguchi S.* On a theorem of Gallot-Meyer-Tachibana in Riemannian manifolds of positive curvature operator // TRU Math. 1975. Vol. 11. P. 17-22.

S.E. S t e p a n o v, I.I. T z y g a n o k

ON A SPACE OF CONFORMALLY-KILLING FORMS

Vector space of conformally-killing forms $T^p(M,R)$ is considered on the m-dimensional Riemann manifold M. Theorem is proved, accoding to which vector spaces $T^p(M,R)$ and $T^{m-p}(M,R)$ on Riemann manifold M of constant nonzero sectional curvature are isomorphic. Space $T^p(M.R)$ is considered also on manifolds of zero and negative sectional curvatures.

УДК 514.76