Учитывая предыдущее замечание, нетрудно построить объекты: $\mathcal{L}_{ab}$, $\underset{(s)}{V}_a$, $L$, $q_{\hat k}$, $\Gamma^a_{\hat i b}$, $V_{\hat i ab}$, $V^{\hat i}_{ab}$, $L_{ab}$, $B_{abc}$, $B_{ab}$, $B^{ab}$, $W^a$.

5. С распределением на гиперповерхности ассоциируются следующие пучки прямых, определяемые точкой $A_0$ и точками

$$\underset{(v)}{P} = A_n + \underset{(v)}{P}^a A_a + P^{\hat i} A_{\hat i}\ ,\ \underset{(s,t)}{F} = A_n + \underset{(s,t)}{F}^a A_a + \underset{(s,t)}{F}^{\hat i} A_{\hat i}\ ,\ \underset{(s)}{W} = A_n + \underset{(s)}{W}^a A_a + \underset{(s)}{W}^{\hat i} A_{\hat i}\ ,$$

которые назовем соответственно нормалями Фосса [2], нормалями Фубини и директрисами Вильчинского [1]. Распределение $\Delta_m$ порождает два пучка, соприкасающихся гиперквадрик гиперповерхности. Их уравнения относительно локального репера имеют соответственно вид

$$A_{\hat i\hat j} x^{\hat i\hat j} + A_{ab} x^a x^b + \frac{2}{m+2} \underset{(s)}{V}_{\hat i} x^{\hat i} x^n + \frac{2}{n-m+1} \underset{(s)}{V}_a x^a x^n + (\underset{(s)}{\hat L}_0 + \alpha(\underset{(s)}{L}_0 - \underset{(s)}{\hat L}_0)) x^{n^2} = 2x^0 x^n,$$

где

$$\underset{(s)}{\hat L}_0 = \frac{1}{m+2} \underset{(s)}{\hat L} - P^a q_a - \frac{2}{n-m+1} P^a \underset{(s)}{V}_a - A_{ab} P^a P^b,$$

$$\underset{(s)}{L}_0 = \frac{1}{n-m+1} \underset{(s)}{L} - P^{\hat k} q_{\hat k} - \frac{2}{m+2} P^{\hat k} \underset{(s)}{V}_{\hat k} - A_{\hat i\hat j} P^{\hat i} P^{\hat j}.$$

Относительно соприкасающихся гиперквадрик $\pi_m$ и $\pi^1_{n-m-1}$ полярно сопряжены.

## Библиографический список


1. Л а п т е в Г.Ф. Гиперповерхность в пространстве проективной связности // ДАН СССР. М., 1958. Т. 121. № 1. С. 41-44.

2. Б л а г о н р а в о в В.В. Распределения на гиперповерхностях аффинного пространства // Автореферат канд. дис. / МГПИ им. В.И. Ленина. М., 1985. 13с.





ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 19 1988

УДК 514.75


# О ГРАДИЕНТНОМ ВЕКТОРНОМ ПОЛЕ, ОРТОГОНАЛЬНОМ СЕКУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ


В.П. Т о л с т о п я т о в

(Свердловский пединститут)


В работе рассматривается случай градиентного поля, заданного на гладкой поверхности евклидова пространства, ортогонального соответствующей секущей поверхности.

1. Присоединим к поверхности $V_p$ подвижной репер $R^x = \{x, \vec e_i, \vec e_\alpha\}$, где $x \in V_p$, векторы $\vec e_i$ ( $i = 1, 2, \ldots, p$ ) лежат в касательном [1], [2] пространстве $T_x(V_p)$ к поверхности в точке $x$, а векторы $\vec e_\alpha$ ($\alpha = p+1, \ldots, n$) образуют базис нормального пространства $N_x(V_p)$ к поверхности $V_p$. Деривационные формулы репера $R^x$ :

$$d\vec x = \omega^i \vec e_i;\ \ d\vec e_i = \omega_i^j \vec e_j + \omega_i^\alpha \vec e_\alpha;\ \ d\vec e_\alpha = \omega_\alpha^j \vec e_j + \omega_\alpha^\beta \vec e_\beta\,. \qquad (1)$$

При этом внешние формы, участвующие в формулах (1), удовлетворяют известным уравнениям структуры пространства $E_n$. Поверхность $V_p$ в репере $R^x$ определяется системой дифференциальных уравнений $\omega^\alpha = 0$, продолжая которую, получим

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j\ ; \qquad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha\,. \qquad (2)$$

Величины $b_{ij}^\alpha$ образуют второй фундаментальный тензор поверхности. Функции $g_{ij} = \vec e_i \cdot \vec e_j$ -компоненты первого основного тензора поверхности [3].

Пусть на поверхности $V_p$ задано векторное поле $\vec\xi$ :

$$\vec\xi = \xi^i \vec e_i\,. \qquad (3)$$

Вместе с векторным полем на поверхности $V_p$ определяется поле аффинора $\mu_i^k = \nabla_{\vec e_i} \xi^k$, образованного ковариантными производными координат векторного поля $\vec\xi$ .

Векторному полю $\vec\xi$ на гладкой поверхности $V_p$ соответствует секущая поверхность $\vec V(\vec\xi)$ 1-распределения $\Delta_1 = \Delta(\vec\xi)$, уравнение которой

$$\vec{\bar{x}} = \vec{x} + \vec{\xi}. \qquad (4)$$

Отсюда имеем:

$$d\vec{\bar{x}} = c^j_i \omega^i \vec{e}_j + b^\alpha_{ij} \xi^j \omega^i \vec{e}_\alpha, \qquad (5)$$

где обозначено $c^j_i = \mu^j_i + \delta^j_i$. При смещении точки $x$ по поверхности $V_p$ в направлении $\omega^i$ ($\omega^i \neq 0$, $\omega^k = 0$, $k \neq i$) точка $\bar{x}$ смещается по поверхности $\bar{V}(\vec{\xi})$ в направлении вектора

$$\vec{a}_i = c^j_i \vec{e}_j + b^\alpha_{ij} \xi^j \vec{e}_\alpha. \qquad (6)$$

В дальнейших наших рассуждениях будем полагать, что секущая поверхность $\bar{V}(\vec{\xi})$ является $p$-мерной. Будем обозначать секущую поверхность $\bar{V}_p$. Векторы $\vec{a}_i$ образуют базис касательного пространства $T_{\bar{x}}(\bar{V}_p)$ к секущей поверхности в точке $\bar{x}$. К поверхности $\bar{V}_p$ присоединим подвижной репер $R^{\bar{x}} = \{\bar{x}, \vec{a}_i, \vec{a}_\alpha\}$. Имеем

$$d\vec{\bar{x}} = \Omega^i \vec{a}_i; \quad d\vec{a}_i = \Omega^j_i \vec{a}_j + \Omega^\alpha_i \vec{a}_\alpha; \quad d\vec{a}_\alpha = \Omega^j_\alpha \vec{a}_j + \Omega^\beta_\alpha \vec{a}_\beta;$$

$\bar{\gamma}_{ij}$, $\vec{\bar{b}}_{ij}$ – первый и второй основные тензоры секущей поверхности $\bar{V}_p$.

Векторное поле $\vec{\xi}$ определяет отображение $f: V_p \to \bar{V}_p$, так что точке $x$ на $V_p$ соответствует точка $\bar{x}$ на $\bar{V}_p$.

2. Рассмотрим случай, когда векторное поле $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности: $\vec{\xi} \in N_{\bar{x}}(\bar{V}_p)$. Имеем:

$$\vec{\xi} \cdot \vec{a}_i = 0. \qquad (7)$$

Дифференцируя (7), получим

$$(\mu^k_j \omega^j \vec{e}_k + \vec{b}_{jk} \xi^k \omega^j) \cdot \vec{a}_i + \vec{\xi} \cdot (\Omega^j_i \vec{a}_j + \Omega^\alpha_i \vec{a}_\alpha) = 0$$

или, учитывая соотношения (6), (7), имеем

$$\mu^k_j \mu^\ell_i \gamma_{k\ell} \omega^j + \mu^k_j \gamma_{ki} \omega^j + \vec{b}_{jk} \xi^k \cdot \vec{b}_{i\ell} \xi^\ell \omega^j + \vec{\bar{b}}_{ij} \cdot \vec{\xi} \omega^j = 0.$$

Так как формы $\omega^j$ линейно независимые, то получим

$$\mu^k_j \mu^\ell_i \gamma_{k\ell} + \mu^k_j \gamma_{ki} + \vec{b}_{jk} \xi^k \cdot \vec{b}_{i\ell} \xi^\ell + \vec{\bar{b}}_{ij} \cdot \vec{\xi} = 0. \qquad (8)$$

Альтернируя соотношение (8), приходим к условию

$$\mu^k_i \gamma_{kj} - \mu^k_j \gamma_{ki} = 0. \qquad (9)$$



Из (9) следует, что $\vec{\xi}$ – градиентное векторное поле [4]. Таким образом, если векторное поле $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности, то оно является градиентным. Обратное, вообще говоря, неверно. Имеет место

Т е о р е м а 1. Градиентное векторное поле ортогонально секущей поверхности тогда и только тогда, когда выполняется условие $\nabla_{\vec{\xi}} \vec{\xi} = -\vec{\xi}$, т.е. $\mu^i_k \xi^k + \xi^i = 0$.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [5]. В индуцированном отображении $f_{*x}: T_x(V_p) \to T_{\bar{x}}(\bar{V}_p)$ направлению $\vec{\xi}$ соответствует направление, определяемое вектором

$$\vec{\bar{\xi}} = \xi^i \vec{a}_i = (\xi^k + \mu^k_i \xi^i) \vec{e}_k + \vec{b}_{ij} \xi^i \xi^j. \qquad (10)$$

Следовательно, если градиентное векторное поле $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности, то направлению $\vec{\xi}$ соответствует направление, определяемое вектором $\vec{b}(\vec{\xi}) = \vec{b}_{ij} \xi^i \xi^j$ – вектором вынужденной кривизны поля $\vec{\xi}$.

Обратно, пусть направлению градиентного векторного поля в индуцированном отображении $f_{*x}$ соответствует направление, определяемое вектором вынужденной кривизны поля: $\vec{\bar{\xi}} = \vec{b}_{ij} \xi^i \xi^j$. Тогда из (10) следует, что $\xi^k + \mu^k_i \xi^i = 0$, т.е. по теореме 1 поле $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. Градиентное векторное поле $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности тогда и только тогда, когда его вектор вынужденной кривизны определяет на секущей поверхности направление $\vec{\xi}$.

З а м е ч а н и е. Так как мы рассматриваем случай невырожденной секущей поверхности $\bar{V}_p$, то из (10) следует, что исключается случай градиентного векторного поля, ортогонального секущей поверхности и одновременно асимптотического.

Из условия (8) имеем:

$$\vec{\bar{b}}_{ij} \cdot \vec{\xi} = -(\mu^k_j \mu^\ell_i \gamma_{k\ell} + \mu^k_j \gamma_{ki} + \vec{b}_{jk} \xi^k \cdot \vec{b}_{i\ell} \xi^\ell). \qquad (11)$$

Свернем (11) с $\xi^i, \xi^j$. Тогда для градиентного векторного поля, ортогонального секущей поверхности, учитывая теорему 2, получим

$$\vec{\bar{b}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{\xi} = \vec{\xi}^2. \qquad (12)$$

Из (12) следует, что векторы $\vec{\ell}(\vec{\xi})$ и $\vec{\xi}$ неортогональны.

Пусть вдоль интегральных линий поля $\vec{\xi}$ отображение $f$ является изометрическим. Имеем $\vec{\bar{\xi}}^2 = \vec{\xi}^2$. Тогда из (12) следует

$$(\vec{\ell}(\vec{\xi}) - \vec{\xi}) \cdot \vec{\xi} = 0,$$

то есть векторы $\vec{\xi}$ и $(\vec{\ell}(\vec{\xi}) - \vec{\xi})$ ортогональны.

Обратно, если векторы $\vec{\xi}$ и $(\vec{\ell}(\vec{\xi}) - \vec{\xi})$ ортогональны, то имеем

$$\vec{\ell}(\vec{\xi}) \cdot \vec{\xi} = \vec{\xi}^2.$$

Отсюда $\vec{\bar{\xi}}^2 = \vec{\xi}^2$, т.е. отображение $f: V_p \to \bar{V}_p$ является изометрическим вдоль интегральных линий поля $\vec{\xi}$. Справедлива

Т е о р е м а 3. Отображение $f: V_p \to \bar{V}_p$ является изометрическим вдоль интегральных линий градиентного векторного поля $\vec{\xi}$, ортогонального секущей поверхности, тогда и только тогда, когда векторы $\vec{\xi}$ и $(\vec{\ell}(\vec{\xi}) - \vec{\xi})$ ортогональны.

## Библиографический список


1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ.М. 1979. Т.9.С.5-246.

2. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов// Тр.Геометр.семинара/ ВИНИТИ. М. 1971.Т.3.С.29-48.

3. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр.Моск.матем.о-ва / ГИТЛ.М. 1953.Т.2. С.275-383.

4. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.М.: Наука. 1976.

5. Т о л с т о п я т о в В.П. К геометрии векторного поля // Дифференциальная геометрия многообразий фигур :Межвуз. темат.сб.науч.тр. / Калинингр.ун-т. Калининград.1985.Вып.16. С.84-86.




ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 514.75

# ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПАРОЙ ЭЛЛИПСОВ, СО СПЕЦИАЛЬНЫМ СВОЙСТВОМ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Т.П. Ф у н т и к о в а

(Калининградский технический институт)

В трехмерном аффинном пространстве исследуются вырожденные [1] конгруэнции $(C_1 C_2)_{1,2}$, порожденные парой эллипсов $C_1$ и $C_2$, имеющих общую касательную $L$, но не инцидентных одной плоскости. Многообразие $(C_1)$ -одномерное, а многообразие $(C_2)$ -двумерное, таким образом, каждому эллипсу $C_1$ соответствует однопараметрическое семейство эллипсов $(C_2)_{C_1}$.

Отнесем конгруэнцию $(C_1 C_2)_{1,2}$ к реперу $R = \{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, вершина $A$ которого помещена в точку касания эллипсов $C_1$, $C_2$, концы векторов $\bar{e}_3$, $\bar{e}_1$ совмещены соответственно с центрами $O_1$ и $O_2$ эллипсов $C_1$ и $C_2$, вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной $L$ и нормирован.

В работе [2] конгруэнциям $(C_1 C_2)_{1,2}$ дана геометрическая характеристика, там же рассмотрен класс конгруэнций $(C_1 C_2)_{1,2}$, многообразие $(C_1)$ которых образует каналовую поверхность.

Рассмотрим конгруэнции $(C_1 C_2)_{1,2}$, для которых: 1/касательные к линии $(O_1)$ проходят через соответствующие точки $O_2$; 2/асимптотические направления на поверхности $(A)$ являются аффинно-биссекторными относительно направлений касательных к координатным линиям $\Gamma_{C_1}$ $(\omega^1=0)$ и $\Gamma$ $(\omega^2=0)$. Такие конгруэнции назовем конгруэнциями $K_1$.

Уравнения эллипсов $C_1$ и $C_2$ относительно выбранного репера и система уравнений Пфаффа, определяющая конгруэнции $(C_1 C_2)_{1,2}$, имеют вид:

$$C_1: \ (x^3)^2 - 2x^3 + (x^2)^2 = 0, \quad x^1 = 0;$$

$$C_2: \ (x^1)^2 - 2x^1 + a^2 (x^2)^2 = 0, \quad x^3 = 0;$$