УДК 517.994

А. С. Кочина, М. Н. Протасевич, В. И. Семенов

НЕОДНОРОДНАЯ ГОМОТЕТИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Доказана новая серия интегральных тождеств для соленоидальных полей. Интерес к этой задаче обусловлен задачами гидродинамики.

There is proved a new set of integral identities. To this problem the interest is explained by hydrodynamics problems.

Ключевые слова: ротор, вихрь, соленоидальное поле.

Keywords: rotor, curl, solenoidal field.

Обозначения

Пусть $u: R^n \to R^n, u = (u_1, u_2, \cdots, u_n), n \geq 2$ — произвольное векторное поле. Символы $u_{k,i} = \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}$, $u_{k,ij} = \dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}$ и др. означают частное или обобщенное дифференцирование; Δ — оператор Лапласа. Далее координаты ротора (если размерность $n = 2, 3$)

$$c_{ki}(u) = u_{k,i} - u_{i,k} \tag{1}$$

рассматриваются как элементы кососимметрической матрицы c. Обобщенная матрица Якоби векторного поля u обозначается символом ∇u. Модуль квадратной матрицы a определяем равенством

$$|a| = (\sum_{i,j} a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Символ $W_p^l(R^n)$ означает соболевский класс векторных полей, которые имеют все обобщенные производные до порядка l включительно и суммируемы в степени $p \geq 1$ вместе со всеми своими производными. Норма в этом пространстве определяется равенством

$$\| v \|_{W_p^l(R^n)} = \sum_{|\alpha| \leq l} \| D^\alpha v \|_p,$$

где символ $\| h \|_p$ означает норму в пространстве $L_p(R^n)$.

Соответственно, символ $C_0^\infty(R^n)$ означает класс бесконечно дифференцируемых отображений, обращающихся в нуль вне некоторого шара. Замыкание класса $C_0^\infty(R^n)$ по норме пространства $W_p^l(R^n)$ обозначается через $\overset{\circ}{W}{}_p^l(R^n)$.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2019. № 3. С. 22 – 26.

Основная идея для новых тождеств

Классическое интегральное тождество для этих полей восходит к теореме Гельмгольца — Вейля о разложении произвольного векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей. Позднее в работах [1; 2] было показано, что пространство $L_2(R^3)$ векторных полей допускает разложение в прямую сумму $L_2(R^3) = J \oplus G$, где подпространства J, G — замыкания в $L_2(R^3)$ множеств финитных гладких соленоидальных и потенциальных полей соответственно. В [3] были указаны принципиально новые тождества, обобщенные в работе [4] на пространства размерности $n \geq 4$. В [5] автором указана новая серия тождеств, содержащих ротор соленоидального поля, которая получила развитие в [6].

Заметим, что для каждого невырожденного линейного преобразования L векторное поле $L^{-1} \circ u \circ L$ — соленоидальное, если таковым является поле u. Поэтому, используя тождество [6]

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \int_{R^n} \Delta u_{i,j} c_{ki}(u) c_{kj}(u) dx = 0 \tag{3}$$

для поля $L^{-1} \circ u \circ L$, получаем новые тождественные равенства, которые позволяют разбить сумму в (3) на нулевые слагаемые.

Основной результат

Для краткости ограничимся размерностью $n = 3$. Тогда основное утверждение описывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть соленоидальное векторное поле* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^5(R^3)$. *Тогда для любой тройки попарно различных индексов* i, j, k *справедливы тождества*

$$\int_{R^3} u_{i,ijj} u_{k,j}^2 dx = \int_{R^3} (u_{i,jjj} u_{k,j} u_{k,i} + u_{k,ijj} u_{i,j} u_{k,j} - u_{k,jjj} u_{i,j} u_{k,i}) dx, \tag{4}$$

$$\int_{R^3} (u_{i,iii} u_{k,j}^2 + u_{j,jjj} u_{k,i}^2) dx = \int_{R^3} (u_{i,iij} u_{k,i} u_{k,j} + u_{j,jji} u_{k,i} u_{k,j} + u_{k,iii} u_{i,j} u_{k,j} -$$
$$- u_{k,ijj} u_{j,i} u_{k,j} - u_{k,iij} u_{i,j} u_{k,i} + u_{k,jjj} u_{j,i} u_{k,i}) dx, \tag{5}$$

$$\int_{R^3} (u_{i,ijj} u_{j,k}^2 + u_{j,iij} u_{i,k}^2 - 2u_{i,ikk} u_{j,k} u_{k,j} - 2u_{j,kkj} u_{i,k} u_{k,i}) dx =$$
$$= \int_{R^3} (u_{i,iij} u_{j,k} u_{i,k} - u_{i,kkj} u_{j,k} u_{k,i} + u_{j,ijj} u_{j,k} u_{i,k} - u_{i,iik} u_{i,j} u_{j,k} +$$
$$+ u_{i,jjk} u_{j,i} u_{j,k} - u_{i,kkk} u_{j,i} u_{k,j} - u_{k,kki} u_{i,j} u_{j,k} + u_{j,iik} u_{i,j} u_{i,k} -$$
$$- u_{j,jjk} u_{j,i} u_{i,k} - u_{j,kkk} u_{i,j} u_{k,i} - u_{k,kkj} u_{j,i} u_{i,k} - u_{j,ikk} u_{i,k} u_{k,j}) dx. \tag{6}$$

Доказательство теоремы 1. Для определенности возьмем значения $i=1, j=2, k=3,$ $L(x)=\left(\frac{x_1}{\alpha}, x_2, x_3\right)$, где коэффициент α выбран произвольно. Пусть u — соленоидальное поле класса $C_0^\infty(R^3)$. В тождестве (3) поле u заменим полем $L^{-1}\circ u\circ L$ и в интегралах сделаем замену $x=L(y)$. Тогда равенство (3) равносильно равенству

$$\frac{1}{\alpha^4}A+\frac{1}{\alpha^2}B+C+\alpha^2 D=0, \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered}
A=\int_{R^3}(u_{2,211}u_{3,1}^2+u_{3,311}u_{2,1}^3-\\
-u_{2,111}u_{3,1}u_{3,2}-u_{2,113}u_{2,1}u_{3,1}+u_{2,111}u_{3,1}u_{2,3}-\\
-u_{3,111}u_{2,1}u_{2,3}-u_{3,112}u_{2,1}u_{3,1}+u_{3,111}u_{2,1}u_{3,2})dx
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
B=\int_{R^3}(u_{1,111}(u_{3,2}-u_{2,3})^2+u_{2,222}u_{3,1}^2+u_{3,333}u_{2,1}^2+u_{3,223}u_{2,1}^2-\\
-2u_{2,112}u_{3,1}u_{1,3}-2u_{3,113}u_{2,1}u_{1,2}-\\
-u_{1,112}(u_{3,1}u_{3,2}-u_{2,3}u_{3,1})+u_{2,111}(u_{1,3}u_{3,2}-u_{1,3}u_{2,3})-\\
-(u_{2,122}+u_{2,133})u_{3,1}u_{3,2}+(u_{2,122}+u_{2,133})u_{2,3}u_{3,1}-\\
-u_{1,113}(u_{2,1}u_{2,3}-u_{2,3}u_{3,2})+u_{3,111}(u_{1,2}u_{2,3}-u_{1,2}u_{3,2})-\\
-u_{3,122}(u_{2,1}u_{2,3}-u_{2,1}u_{3,2})-u_{3,331}(u_{2,1}u_{2,3}-u_{2,1}u_{3,2})+\\
+u_{2,113}(u_{1,2}u_{3,1}+u_{2,1}u_{1,3})-(u_{2,223}+u_{2,333})u_{2,1}u_{3,1}+\\
u_{3,112}(u_{1,2}u_{3,1}+u_{2,1}u_{1,3})+(u_{3,222}+u_{3,233})u_{2,1}u_{3,1})dx,
\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}
C=\int_{R^3}(u_{1,122}(u_{3,2}-u_{2,3})^2+u_{1,133}(u_{3,2}-u_{2,3})^2+\\
u_{2,112}u_{1,3}^2+u_{3,113}u_{1,2}^2-2\left(u_{2,222}+u_{2,332}\right)u_{1,3}u_{3,1}-\\
-u_{1,112}(u_{2,3}u_{1,3}-u_{3,2}u_{1,3})+u_{1,222}(u_{3,1}u_{3,2}-u_{2,3}u_{3,1})-\\
-u_{1,332}(u_{3,1}u_{3,2}-u_{3,1}u_{2,3})-u_{2,122}(u_{1,3}u_{2,3}-u_{1,3}u_{3,2})-\\
-u_{1,113}(u_{1,2}u_{3,2}-u_{1,2}u_{2,3})-u_{1,223}(u_{2,3}u_{2,3}-u_{2,1}u_{3,2})-\\
u_{1,333}(u_{2,1}u_{2,3}-u_{2,1}u_{3,2})-u_{3,221}(u_{1,2}u_{3,2}-u_{1,2}u_{2,3})-\\
-u_{3,331}(u_{1,2}u_{3,2}-u_{1,2}u_{2,3})-u_{2,113}u_{1,2}u_{1,3}+\\
+u_{2,223}(u_{1,2}u_{3,1}+u_{2,1}u_{1,3})+u_{2,333}(u_{1,2}u_{3,1}+u_{2,1}u_{1,3})-\\
-u_{3,112}u_{1,2}u_{1,3}+u_{3,222}(u_{1,2}u_{3,1}+u_{2,1}u_{1,3})+\\
+u_{3,332}(u_{1,2}u_{3,1}+u_{2,1}u_{1,3})-u_{2,133}(u_{2,3}u_{1,3}-u_{1,3}u_{3,2})dx,
\end{gathered} \tag{10}$$

$$D=\int_{R^3}((u_{2,222}+u_{2,233})u_{1,3}^2+(u_{3,223}+u_{3,333})u_{1,2}^2+$$
$$u_{1,222}(u_{1,3}u_{3,2}-u_{1,3}u_{2,3})+u_{1,332}(u_{1,3}u_{3,2}-u_{1,3}u_{2,3})+$$
$$+u_{1,223}(u_{1,2}u_{3,2}-u_{1,2}u_{3,2})+u_{1,333}(u_{1,2}u_{2,3}-u_{1,2}u_{3,2})-$$
$$-(u_{2,223}+u_{2,333}+u_{3,332}+u_{3,222})u_{1,2}u_{1,3})dx. \qquad (11)$$

Линейная независимость функций $1/\alpha^4, 1/\alpha^2, 1, \alpha^2$ и равенство (3) влекут за собой тождества

$$A=0, B=0, C=0, D=0. \qquad (12)$$

В каждом из них векторное поле u вновь заменяем на поле $L^{-1}\circ u\circ L$, где в этот раз $L(x)=\left(\frac{x_1}{\alpha}, x_2, x_3\right)$. Аналогичные рассуждения с каждым из равенств (12) приводят к тождествам вида

$$\frac{1}{\alpha^2}E+F+\alpha^2 G=0, \qquad (13)$$

из которых следует обращение коэффициентов E, F, G в нуль. Каждое новое тождество (а их получается 12) совпадает с одним из тождеств в формулировке теоремы. Таким образом, утверждение доказано для гладких финитных полей. Тогда общий случай очевиден.

Список литературы

1. *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики // Известия АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. С. 3—50.
2. *Соболев С.Л.* Избранные труды. Новосибирск, 2003. Т. 1.
3. *Доброхотовов С.Ю., Шафаревич А.И.* О поведении на бесконечности поля скоростей несжимаемой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1996. Вып. 4. С. 38—42.
4. *Brandolese L.* On the Localization of Symmetric and Asymmetric Solutions of the Navier — Stokes Equations in R^n // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 2001. V. 332. P. 125—130.
5. *Семенов В.И.* Некоторые общие свойства соленоидальных векторных полей и их приложения к уравнениям Эйлера и Навье — Стокса на плоскости // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. 2008. Т. 15, №13. С. 109—129.
6. *SemenovV.I.* Some New Integral Identities for Solenoidal Fields and Applications // Mathematics. 2014. Vol. 2. P. 29—36.

Об авторах

Александра Сергеевна Кочина — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: AKochina@kantiana.ru

Михаил Николаевич Протасевич — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: MProtasevich@kantiana.ru

Владимир Иосифович Семенов — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.
E-mail: visemenov@rambler.ru

The authors

Alexandra S. Kochina, Assistant Professor, I. Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: AKochina@kantiana.ru

Michael N. Protasevich, Assistant Professor, I. Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: Protasevich@kantiana.ru

Prof. Vladimir I. Semenov, I. Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: visemenov@rambler.ru