ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

О.С.Р е д о з у б о в а

ПАРЫ Θ НОРМАЛЬНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

Проективные свойства пар Θ конгруэнций изучались в работе [1].

Целью настоящей работы является изучение метрических свойств пары Θ конгруэнций [4], каждая из которых нормальная.

I. Известно [2], что у нормальной конгруэнции фокальные плоскости перпендикулярны. Пусть вершина O ортонормированного подвижного репера находится в центре прямой нормальной конгруэнции $\{\tau_1\}$, фокусы которой F_1 и F_1', орт $\vec{e}_3$ направлен по прямой, а орты $\vec{e}_a$ $(a=1,2)$ являются векторами нормалей фокальных поверхностей конгруэнции (F_1) и (F_1'). Как обычно, деривационные формулы репера $\{O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\}$ имеют вид:

$$d\vec{O}=\omega^i\vec{e}_i\ ,\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j\ ,\quad (i,j,k=1,2,3),$$

причем, $\omega_i^j=-\omega_j^i$ и формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства:

$$\mathcal{D}\omega^i=\omega^k\wedge\omega_k^i\ ,\quad \mathcal{D}\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j .$$

Касательная плоскость Π_1 поверхности (F_1) в точке F_1 определяется условием:

$$(d\vec{F}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)=0,$$

которое приводится к виду:

$$\omega^1=\rho\,\omega_1^3, \tag{1}$$

где

$$\overrightarrow{OF_1}=-\overrightarrow{OF_1'}=\rho\vec{e}_3,$$

$$d\vec{F}_1=(\omega^1-\rho\omega_1^3)\vec{e}_1+(\omega^2-\rho\omega_2^3)\vec{e}_2+(\omega^3+d\rho)\vec{e}_3 .$$

Аналогично касательная плоскость Π_2 фокальной поверхности (F_1') в точке F_1' определится условием

$$\omega^2=-\rho\,\omega_2^3 . \tag{2}$$

Другая конгруэнция, входящая в пару, есть конгруэнция $\{\tau_2\}$ с фокусами F_2, F_2'.

Известно, что парой Θ конгруэнций $\{F_1, F_1'\}$ и $\{F_2, F_2'\}$ [3] называется такая пара, у которой касательные плоскости (F_1), (F_1') проходят соответственно через фокусы F_2, F_2', а касательные плоскости поверхностей (F_2) и (F_2') проходят, соответственно через фокусы F_1' и F_1. Так как $F_2\in\Pi_1, F_2'\in\Pi_2$, то $F_2(0,y,z_1)$, $F_2'(x,0,z_2)$. Тогда

$$d\vec{F}_2=(\omega^1-y\omega_1^2-z_1\omega_1^3)\vec{e}_1+(\omega^2+dy-z_1\omega_2^3)\vec{e}_2+(\omega^3+dz_1+y\omega_2^3)\vec{e}_3 ,$$

$$d\vec{F}_2'=(\omega^1-dx-z_2\omega_1^3)\vec{e}_1+(\omega^2+x\omega_1^2-z_2\omega_2^3)\vec{e}_2+(\omega^3+dz_2+x\omega_1^3)\vec{e}_3 .$$

Условия того, что конгруэнции $\{\tau_a\}$ образуют пару Θ, имеют вид:

$$(d\vec{F}_2, \overrightarrow{F_2F_2'}, \overrightarrow{F_2F_1'})=0,\quad (d\vec{F}_2', \overrightarrow{F_2F_2'}, \overrightarrow{F_2'F_1})=0 .$$

Эти условия сводятся к уравнениям

$$(\omega^1-y\omega_1^2-z\omega_1^3)(z_2+\rho)y+(\omega^2+dy-z_1\omega_2^3)(\rho+z_1)x-$$
$$-(\omega^3+dz_1+y\omega_2^3)xy=0, \tag{3}$$

$$(\omega^1+dx-z_2\omega_1^3)(\rho-z_2)y-(\omega^2+x\omega_1^2-z_2\omega_2^3)(z_1-\rho)x+$$
$$+(\omega^3+dz_2+x\omega_1^3)xy=0 . \tag{4}$$

Наконец, условие нормальности конгруэнции $\{\tau_2\}$ есть условие перпендикулярности фокальных плоскостей этой конгруэнции:

$$y^2(z_1^2-\rho^2)+x^2(z_1^2-\rho^2)=-x^2y^2 . \tag{5}$$

Можно доказать следующую теорему:

Т е о р е м а I. Пара Θ нормальных конгруэнций существует с произволом четырех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 2. У пары Θ нормальных конгруэнций косинус угла между соответствующими прямыми (F_1F_2') и $(F_1'F_2)$ первой пары дополнительных конгруэнций равен произведению косинусов углов, образованных этими прямыми с прямыми (F_1F_1') конгруэнции $\{\tau_1\}$. Косинус угла между соответствующими прямыми (F_1F_2) и $(F_1'F_2')$ второй пары дополнительных конгруэнций равен произведению косинусов углов, образованных этими прямыми с прямыми (F_2F_2') конгруэнции $\{\tau_2\}$.

Доказательство следует из условия нормальности конгруэнций $\{\tau_a\}$ $(a=1,2)$:

$$[\overrightarrow{F_1F_2},\ \overrightarrow{F_1F_1'}]\cdot[\overrightarrow{F_1'F_2'},\ \overrightarrow{F_1F_1'}]=0,$$

$$[\overrightarrow{F_1F_2'},\ \overrightarrow{F_2F_2'}]\cdot[\overrightarrow{F_1'F_2},\ \overrightarrow{F_2F_2'}]=0,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}&\cos(\overrightarrow{F_1F_2},\widehat{\ }\overrightarrow{F_1'F_2'})=\cos(\overrightarrow{F_1F_2},\widehat{\ }\overrightarrow{F_1F_1'})\cos(\overrightarrow{F_1F_1'},\widehat{\ }\overrightarrow{F_1'F_2'}),\\&\cos(\overrightarrow{F_1F_2'},\widehat{\ }\overrightarrow{F_1'F_2})=\cos(\overrightarrow{F_1F_2'},\widehat{\ }\overrightarrow{F_2F_2'})\cos(\overrightarrow{F_1'F_2},\widehat{\ }\overrightarrow{F_2F_2'}).\end{aligned}\qquad(6)$$

Т е о р е м а 3. В касательных плоскостях поверхности, нормальной к прямым конгруэнции $\{\tau_1\}$, не могут лежать прямые нормальной конгруэнции $\{\tau_2\}$, образующей с $\{\tau_1\}$ пару θ.

Заметим, что если отказаться от требования нормальности конгруэнции $\{\tau_2\}$, то в касательных плоскостях некоторой поверхности можно расположить прямые конгруэнции $\{\tau_2\}$ так, чтобы она вместе с конгруэнцией нормалей этой поверхности образовала пару θ. Можно доказать:

Т е о р е м а 4. Пара θ конгруэнций, из которых одна нормальная, а прямые другой лежат в касательных плоскостях некоторой поверхности, нормальной к прямым первой конгруэнции, существует с произволом десяти произвольных постоянных.

2. Пара θ конгруэнций называется равнонаклонной, если прямые одной конгруэнции образуют с фокальными плоскостями второй углы, соответственно конгруэнтные тем углам, которые образуют прямые второй конгруэнции с фокальными плоскостями первой.

Поместим вершину ортонормированного подвижного репера $\{O,\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3\}$ на прямой конгруэнции $\{\tau\}$ общих перпендикуляров, вектор $\vec e_3$ направим по этой прямой. K_a $(a=1,2)$ – точки

пересечения прямой τ с соответствующими прямыми τ_a пары, причем $\overrightarrow{OK_a}=k_a\vec e_3$. Направляющие векторы прямых τ_a:

$$\vec\eta_a=\vec e_1\cos\alpha_a+\vec e_2\sin\alpha_a. \qquad (7)$$

Деривационные формулы репера, как и ранее,

$$d\vec O=\omega^i\vec e_i,\quad d\vec e_i=\omega_i^j\vec e_j\quad (i,j=1,2,3), \qquad (8)$$

причем

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0.$$

Фокусы прямой τ_a есть точки F_a, F_a', причем

$$\overrightarrow{K_aF_a}=\rho_a\vec\eta_a,\quad \overrightarrow{K_aF_a'}=\rho_a'\vec\eta_a. \qquad (9)$$

О п р е д е л е н и е. Парами θ 1-го типа называются такие пары, у которых $|\rho_1|=|\rho_2|$, $|\rho_1'|=|\rho_2'|$, парами 2-го типа – пары, у которых $|\rho_1|=|\rho_2'|$, $|\rho_2|=|\rho_1'|$.

Т е о р е м а 5. Для того, чтобы пара θ конгруэнций была равнонаклонной, необходимо и достаточно, чтобы она была парой 1-го или 2-го типов.

Т е о р е м а 6. Для того, чтобы пары θ конгруэнций были равнонаклонными, необходимо и достаточно, чтобы у пары были равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых и конгруэнтны углы между фокальными плоскостями этих прямых.

Т е о р е м а 7. Для того, чтобы пара θ нормальных конгруэнций была равнонаклонной, необходимо и достаточно, чтобы фокальные расстояния соответствующих прямых были равны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть конгруэнции τ_a нормальные. Тогда выполняются условия:

$$\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'=-\frac{(k_1-k_2)^2}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}. \qquad (10)$$

Если фокальные расстояния соответствующих прямых τ_1, τ_2 равны между собой, т.е. $|\rho_1-\rho_1'|=|\rho_2-\rho_2'|$, то учитывая выписанное условие, получим либо $|\rho_1|=|\rho_2|$, $|\rho_1'|=|\rho_2'|$, либо $|\rho_1|=|\rho_2'|$, $|\rho_2|=|\rho_1'|$. Итак, пары θ 1-го или 2-го типов и, следовательно, равнонаклонны.

Если пары Θ нормальных конгруэнций равнонаклонны, то в силу предыдущей теоремы, фокальные расстояния соответствующих прямых будут равны.

Т е о р е м а 8. Не существует пар Θ нормальных конгруэнций, которые пересекаются в центрах прямыми конгруэнции их общих перпендикуляров.

3. Выясним, существует ли пара Θ, образованная нормалями фокальных поверхностей некоторой конгруэнции, которая для такой пары будет конгруэнцией общих перпендикуляров. Воспользуемся сначала ортонормированным подвижным репером, введенным в предыдущем пункте.
В данном случае поверхности (K_a) являются фокальными поверхностями конгруэнции $\{\tau\}$ общих перпендикуляров, следовательно, $h_1 - h_2$ — фокальное расстояние конгруэнции $\{\tau\}$. Условиями того, что пара $\{\tau_a\}$ является парой Θ, будут условия:

$$(d\vec{F}_1, \vec{\eta}_1, \overrightarrow{F_1F_2}) = 0, \quad (d\vec{F}_2, \vec{\eta}_2, \overrightarrow{F_2F_1'}) = 0,$$

$$(d\vec{F}_1', \vec{\eta}_1, \overrightarrow{F_1'F_2'}) = 0, \quad (d\vec{F}_2', \vec{\eta}_2, \overrightarrow{F_2'F_1}) = 0.$$

Эти условия можно привести к виду:

$$A_1\rho - Q_1\tau_2 + \Omega_{13}\frac{k_2\tau_1}{h_1-h_2} = 0, \quad H_1\rho - Q_1\tau_1 + \Omega_{13}\frac{k_1\tau_2}{h_1-h_2} = 0,$$
$$A_2 g - Q_2\tau_1 - \Omega_{23}\frac{k_1\tau_2}{h_1-h_2} = 0, \quad H_2 g + Q_2\tau_2 + \Omega_{23}\frac{k_2\tau_1}{h_1-h_2} = 0. \qquad (11)$$

Здесь использованы обозначения: $\tau_a = \rho_a - \rho_a'$, $g = \rho_1\rho_2 - \rho_1'\rho_2'$,

$$\rho = \rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2', \quad k_1 = \rho_1\rho_1', \quad k_2 = \rho_2\rho_2', \qquad (12)$$

$$H_a = \frac{\omega^3 + dh_a}{h_1 - h_2}, \quad A_a = \frac{\omega_1^2 + d\alpha_a}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad \Omega_a^* = \omega^1 \sin\alpha_a - \omega^2\cos\alpha_a, \qquad (13)$$

$$\Omega_{a3} = \omega_1^3\cos\alpha_a + \omega_2^3\sin\alpha_a, \quad \Omega_{a3}^* = -\omega_1^3\sin\alpha_a + \omega_2^3\cos\alpha_a, \quad Q_a = \frac{\Omega_a^* + h_a\Omega_{a3}^*}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}. \qquad (14)$$

Известно [4], что существуют 4 класса пар Θ:

$$\Theta_1(\rho \neq 0, g \neq 0), \quad \Theta_2(\rho = 0, g \neq 0), \quad \Theta_3(\rho \neq 0, g = 0), \quad \Theta_4(\rho = 0, g = 0).$$

Конгруэнции $\{\tau_a\}$ являются конгруэнциями нормалей фокальных поверхностей (K_a). Следовательно, направляющие векторы прямых $\{\tau_a\}$ есть $\vec{\eta}_a$ из (7), и они будут коллинеарны векторам нормалей $\vec{n}_a$ поверхностей (K_a).

$$\vec{\eta}_a \parallel \vec{n}_a. \qquad (15)$$

Если отнести конгруэнцию к трехграннику [3, с. 404], вершина которого находится в центре прямой конгруэнции $\{\tau\}$, вектор $\vec{e}_3$ направлен по прямой τ, а векторы $\vec{e}_a$ лежат в биссекторных плоскостях этой конгруэнции, тогда из [3] следует, что

$$\omega^1 = -\hat{\rho}\,\mathrm{ctg}\,\varphi\cdot\omega_2^3, \quad \omega^2 = -\hat{\rho}\,\mathrm{tg}\,\varphi\cdot\omega_1^3, \qquad (16)$$

где $2\hat{\rho}$ и 2φ — фокальное расстояние и угол между фокальными плоскостями конгруэнции $\{\tau\}$.
Тогда векторы нормалей (K_a) имеют вид: $\vec{n}_a = -\vec{e}_1\sin\varphi \pm \vec{e}_2\cos\varphi$.
Условие (15) можно записать в виде

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \alpha_2 = -\alpha_1. \qquad (17)$$

Обозначим $\alpha = \alpha_1$, $h = h_1$. Здесь $h_1 = -h_2 = \hat{\rho}$.

Т е о р е м а 9. Пара Θ конгруэнций, образованная нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров, существует с произволом двух функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что не существует пар $\Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$, образованных нормалями фокальных поверхностей (K_a) конгруэнции $\{\tau\}$. В рассматриваемом репере, т.е. с учетом (16)

$$\Theta_1 = \frac{2\hat{\rho}\sin(\varphi - \alpha)}{\sin 2\alpha\cdot\sin 2\varphi}(\omega_1^3\sin\varphi + \omega_2^3\cos\varphi),$$
$$\Theta_2 = \frac{2\hat{\rho}\sin(\varphi - \alpha)}{\sin 2\alpha\cdot\sin 2\varphi}(\omega_1^3\sin\varphi - \omega_2^3\cos\varphi). \qquad (18)$$

Среди уравнений, определяющих пары Θ, имеется уравнение

$$Q_1 = \Omega_{13}\frac{\rho_1'\rho_2}{2h}.$$

Сопоставляя его с (18), получим $\hat{\rho} = 0$, чего быть не может.

Аналогично доказывается,что не может быть в рассматриваемом случае ни пар Θ_3 ,ни пар Θ_4 .Пара Θ_1 в данном случае определяется системой уравнений (II),(I6),(I7).Дифференцируя внешним образом уравнения (I6) и учитывая,что $d\varphi=d\alpha$, получим

$$(\Omega_{23}\wedge A_1)+(H_1\wedge\Omega_{13})=0,\ (\Omega_{13}\wedge A_2)+(H_2\wedge\Omega_{23})=0.$$

Подставляя сюда выражения H_a, A_a из (I3),получим

$$K_1=K_2=-\frac{4h^2}{\sin^2 2\alpha}. \tag{19}$$

Можно показать,что из уравнений (II) независимых будет только два.Их линейные комбинации имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 2A_2 g\tau_1\tau_2 &= \rho H_1(\tau_2^2-\tau_1^2)-gH_2(\tau_1^2+\tau_2^2),\\ 2A_1\rho\tau_1\tau_2 &= \rho H_1(\tau_1^2+\tau_2^2)+gH_2(\tau_1^2-\tau_2^2). \end{aligned} \tag{20}$$

Дифференцируя уравнение (I9),получим

$$\begin{aligned} dK_1=[\Omega_{13}\{(\tau_1\cos 2\alpha+\tau_2)\rho+(\tau_1\cos 2\alpha-\tau_2)g\}+\\ +\Omega_{23}\{(\tau_2\cos 2\alpha+\tau_1)\rho-(\tau_2\cos 2\alpha-\tau_1)g\}]\frac{K_1^2}{hg\rho}. \end{aligned} \tag{21}$$

Внешнее дифференцирование (2I) приводит к тождеству. Исследование системы (I7),(I9),(20),(2I) показывает,что неизвестными формами являются $d\tau_1$, $d\tau_2$, т.е.

$$q=2,\ S_1=2,\ S_2=0,\ N=Q=2.$$

Итак, пара Θ конгруэнций,образованных нормалями фокальных поверхностей некоторой конгруэнции,существует с произволом двух функций одного аргумента.

Т е о р е м а I0. Пара Θ конгруэнций,образованная нормалями фокальных поверхностей некоторой конгруэнции,симметрическая,и эта конгруэнция является конгруэнцией B .

Д о к а з а т е л ь с т в о.Из уравнений (I7) следует симметричность пары.Из уравнений (I9) следует,что $K_1=K_2$ или $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'$.Но ρ_a, ρ_a' есть главные радиусы кривизны поверхностей (K_a),следовательно,их полные кривизны равны между собой в точках K_1, K_2 .Из условия (I9) следует, что полные кривизны в соответствующих точках равны величине

$$-\frac{\sin^2 2\varphi}{(2\rho)^2}=-\frac{1}{d^2},$$

d -расстояние между граничными точками конгруэнции $\{\tau\}$,

$$K=K_2=-\frac{1}{d^2}.$$

Итак,полные кривизны поверхностей (K_a)равны между собой и равны обратной величине квадрата расстояния между граничными точками конгруэнции $\{\tau\}$,взятой с противоположным знаком.Известно [2,с.90] ,что свойство

$$K_1\cdot K_2=\frac{1}{d^4}$$

является характеристическим для конгруэнции W .Кроме того,конгруэнция W с равной отрицательной кривизной фокальных поверхностей в точках одной прямой есть конгруэнция B [2,с.94] .Итак,конгруэнция $\{\tau\}$ входит в число конгруэнций B .

Список литературы

I.К а р а п е т я н С.Е. Конфигурация Θ Попова."Сб. научн.трудов Арм.пед.ин-та",I955,5.

2.Ф и н и к о в С.П. Теория конгруэнций. М.-Л.,I950.

3.Ф и н и к о в С.П. Теория пар конгруэнций.М.,I956.

4.Р е д о з у б о в а О.С. О метрических свойствах пар Θ конгруэнций.- Дифференциальная геометрия многообразий фигур ,Вып.6,Калининград,I975.