УДК 514.76

***А. Я. Султанов*[1]*, Г. А. Султанова*[2]**
[1] *Пензенский государственный университет, Россия*
[2] *Пензенский филиал Военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А. В. Хрулева Министерства обороны РФ, Россия*
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-11

О локальном представлении синектических связностей на расслоениях Вейля

В данной работе получены выражения в естественных локальных координатах для синектического лифта А. П. Широкова линейной связности и компоненты тензорных полей кривизны и кручения на расслоении Вейля.

Ключевые слова: касательное расслоение, алгебра Вейля, синектическая связность, тензорное поле кривизны, тензорное поле кручения

Синектические расширения полных лифтов линейных связностей в касательных расслоениях были введены А. П. Широковым в 70-е годы прошлого столетия [1; 2]. Он установил, что эти связности являются линейными и представляют собой вещественные реализации линейных связностей на касательных расслоениях первого порядка, снабженных гладкой структурой над алгеброй дуальных чисел. Он доказал также существование гладкой структуры на касательных расслоениях произвольного порядка $T^k(M)$ на гладком многообразии M над алгеброй $R(\varepsilon^k)$ плюральных чисел. Изучая голоморфные линейные связности на $T^k(M)$ над алгеброй $R(\varepsilon^k)$, А. П. Ши-

Поступила в редакцию 30.05.2022 г.

роков получил вещественные реализации этих связностей, которые назвал синектическими расширениями линейной связности, заданной на M. Естественным обобщением алгебры плюральных чисел является алгебра А. Вейля, а обобщением касательного расслоения — расслоение А. Вейля. В работе [3] показано, что синектическое расширение линейных связностей, заданных на гладком многообразии, можно построить и на расслоениях А. Вейля M^{A}, где A — алгебра А. Вейля. Геометрия этих расслоений изучалась многими авторами — А. Моримото, В. В. Шурыгиным и др. Подробный разбор этих работ можно найти в [3].

В настоящей работе изучаются синектические лифты линейных связностей, заданных на расслоениях А. Вейля.

Напомним, что алгеброй А. Вейля над полем R называется линейная алгебра A, являющаяся коммутативной, ассоциативной, обладающая единицей и максимальным нильпотентным идеалом I, таким, что факторалгебра A/I изоморфна алгебре R.

В дальнейшем будем считать, что единица алгебры A отождествлена с единицей поля R, а остальные базисные элементы выбраны в идеале I.

Пусть M — гладкое многообразие класса C^∞ размерности n, $C^\infty(M)$ — вещественная алгебра гладких класса C^∞ функций, заданных на M и принимающих значения в R. Обозначим через M_q^{A} множество всевозможных гомоморфизмов $j_q : C^\infty(M) \to \mathrm{A}$, где $q \in M$, удовлетворяющих условию $j_q(f) \equiv f(q)(\mathrm{mod}\,\mathrm{I})$. Множество $M^{\mathrm{A}} = \bigcup_{q\in M}(M)_q^{\mathrm{A}}$ можно естественным образом наделить структурой гладкого многообразия над алгеброй A и гладкой структурой над R [1]. Отображение $\pi : M^{\mathrm{A}} \to M$, определенное условием $\pi(j_q) = q$, называется канонической проекцией, а тройка (M^{A},π,M) — расслоением А. Вейля. Функция f^{A}, определенная условием $f^{\mathrm{A}}(j_q)=j_q(f)$ для каждого гомоморфизма j_q, называется естественным продолжением функции f, а функция $f_{(0)}=f\circ\pi$ — вертикальным лифтом функции $f\in C^{\infty}(M)$ с M на M^{A}.

Обозначим через A^* векторное пространство линейных форм, заданных на A как на векторном пространстве, принимающих значения в поле R действительных чисел.

Пусть $a^*\in\mathrm{A}^*, f\in C^{\infty}(M_n)$. Зададим функцию $f_{(a^*)}:M^{\mathrm{A}}\to R$ равенством $f_{(a^*)}=a^*\circ f^{\mathrm{A}}$. Пусть (U,x^i) — карта гладкой структуры на M. Тогда функции $x^i_\alpha=(x^i)_{e_\alpha}$, где e_α — элементы дуального к базису $\left(\varepsilon^\alpha\right)$ алгебры A, определяют координатные функции в карте $\pi^{-1}(U)$. Векторные поля $\left(\partial_i\right)^\alpha=\partial_i^\alpha=\dfrac{\partial}{\partial x^i_\alpha}$ составляют поле натурального репера в карте $\pi^{-1}(U)$. При помощи этих функций можно определить лифты векторных полей с M на M^{A}. Пусть $a\in\mathrm{A}$ — любой фиксированный элемент алгебры A, X — произвольное гладкое векторное поле на M. На расслоении M^{A} существует единственное векторное поле $X^{(a)}$, удовлетворяющее условию

$$X^{(a)}f_{(b^*)}=(Xf)_{(b^*\cdot a)}$$

для любой функции $f\in C^{\infty}(M)$. В этом равенстве $b^*\cdot a\in A^*$ определяется по правилу $b^*\cdot a(b)=b^*(ab)$. Для векторного поля X можно построить его естественное продолжение X^{A}

на M_n^{A}. Оно задается условием $X^{\mathrm{A}} f^{\mathrm{A}} = (Xf)^{\mathrm{A}}$ для любой функции $f \in C^{\infty}(M)$. Векторное поле $\widetilde{X}$ на A является голоморфным тогда и только тогда, когда $\widetilde{X} = \varepsilon^{\alpha} X_{\alpha}^{A}$ $(\alpha = 0, 1, ..., N-1)$. Линейная связность $\widetilde{\nabla}$, заданная на M^{A}, называется голоморфной, если векторное поле $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$ является голоморфным для любых голоморфных векторных полей $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$, заданных на M^{A}.

Имеет место

Предложение 1. *Линейная связность* $\widetilde{X}$*, заданная на расслоении Вейля* M^{A}*, голоморфна тогда и только тогда, когда на базе M этого расслоения существует такая линейная связность* $\nabla = \Gamma_0$*, тензорные поля* Γ_{λ} $(\lambda = 1, 2, ..., N-1)$ *— тензорные поля типа (1,2), что выполняется тождество*

$$\widetilde{\nabla}_{X^{\mathrm{A}}} Y^{\mathrm{A}} = \varepsilon^{\alpha} (\Gamma_{\alpha}(X, Y))^{\mathrm{A}}.$$

Определение. *Вещественной реализацией линейной связности* $\widetilde{\nabla}$ называется линейная связность $\widetilde{\nabla}^{R}$ на M^{A}, если для любых $a, b \in \mathrm{A}$ и любых векторных полей X и Y выполняется равенство

$$\widetilde{\nabla}^{R}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\widetilde{\nabla}_{X^{\mathrm{A}}} Y^{\mathrm{A}})^{(ab)}.$$

Вещественную реализацию $\widetilde{\nabla}^{R}$ обозначим через ∇^{sh} и будем называть синектической связностью А. П. Широкова. Отсюда следует тождество

$$\nabla^{sh}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\Gamma_{\alpha}(X, Y))^{(\varepsilon^{\alpha} ab)}. \qquad (1)$$

Положим

$$\nabla_{\partial_j} \partial_k = \Gamma^{i}_{jk} \partial_i,$$

$$\Gamma_{\alpha}(\partial_j, \partial_k) = \Gamma^{i}_{\alpha jk} \partial_i \ (\alpha = 0, 1, 2, ..., N-1).$$

Отметим, что $\Gamma^i_{0jk} = \Gamma^i_{jk}$.

На $\pi^{-1}(U)$ положим

$$\nabla^{sh}(\partial^\alpha_j, \partial^\beta_k) = \Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma}\partial^\sigma_i .$$

Из соотношений (1) для синектической связности ∇^{sh} следует, что

$$\nabla^{sh}(\partial^\alpha_j, \partial^\beta_k) = (\Gamma_\nu(\partial_j, \partial_k))^{\left(\varepsilon^\nu \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta\right)},$$

где $\left(\varepsilon^\alpha\right)$ — базис алгебры A, причем $\varepsilon^0 = 1$. Поэтому

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma}\partial^\sigma_i = \gamma^{\nu\alpha\beta}_\tau (\Gamma^i_{\nu jk}\partial_i)^{\left(\varepsilon^\tau\right)} = \gamma^{\nu\alpha\beta}_\tau (\Gamma^i_{\nu jk})_{(\mu)}\partial_i^{(\varepsilon^\mu \varepsilon^\tau)} = \gamma^{\nu\alpha\beta\mu}_\sigma (\Gamma^i_{\nu jk})_{(\mu)}\partial^\sigma_i .$$

Отсюда

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\nu\alpha\beta\mu}_\sigma (\Gamma^i_{\nu jk})_{(\mu)} . \tag{2}$$

Так выражаются коэффициенты синектической связности ∇^{sh} через $\Gamma^i_{\alpha jk}$ и структурные постоянные алгебры Вейля.

Для полного лифта $\nabla^{(0)}$ связности ∇, поскольку $\Gamma_\lambda = 0\ (\lambda \neq 0)$, из формул (2) получим следующие формулы для коэффициентов:

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\alpha\beta\mu}_\sigma (\Gamma^i_{jk})_{(\mu)} . \tag{3}$$

В частном случае, когда алгебра A является алгеброй дуальных чисел $R(\varepsilon)$, формулы (2) дают известные соотношения для вычисления коэффициентов полного лифта линейной связности на касательном расслоении $T(M)$. Если A является алгеброй плюральных чисел $R(\varepsilon^r)$, то по формулам (2) вычисляются коэффициенты синектического лифта линейной связности на касательном расслоении $T^r(M)$.

Заметим, что в силу коммутативности и ассоциативности алгебры Вейля A из формул (2) следуют соотношения

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \Gamma^{\beta\alpha i}_{jk\sigma}. \qquad (4)$$

Из соотношений (2) и соотношений $\gamma^{0\beta}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha}$ следует, что

$$\Gamma^{\alpha 0 i}_{jk\sigma} = \gamma^{\nu\alpha\mu}_{\sigma}(\Gamma^{i}_{\nu jk})_{(\mu)}; \qquad (5)$$

$$\Gamma^{00i}_{jk\sigma} = \gamma^{\nu\mu}_{\sigma}(\Gamma^{i}_{\nu jk})_{(\mu)}; \qquad (6)$$

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk0} = 0 \text{ при } \alpha \neq 0 \text{ или } \beta \neq 0;\ \Gamma^{00i}_{jk0} = (\Gamma^{i}_{jk})_{(0)}.$$

Предложение 2. *Коэффициенты* $\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma}$ *синектической связности* ∇^{sh} *удовлетворяют условиям*

$$1)\ \Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\beta\mu}_{\sigma}\Gamma^{\alpha 0 i}_{jk\mu};$$

$$2)\ \Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\alpha\mu}_{\sigma}\Gamma^{0\beta i}_{jk\mu};$$

$$3)\ \Gamma^{\alpha 0 i}_{jk\sigma} = \gamma^{\alpha\mu}_{\sigma}\Gamma^{00i}_{jk\mu};$$

$$4)\ \Gamma^{0\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\beta\mu}_{\sigma}\Gamma^{00i}_{jk\mu};$$

$$5)\ \Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\alpha\beta\mu}_{\sigma}\Gamma^{00i}_{jk\mu}.$$

Доказательство. В формулах (2) коэффициенты $\gamma^{\nu\alpha\mu}_{\sigma}$ определяются условием

$$\varepsilon_{\sigma}(\varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\alpha}\varepsilon^{\beta}\varepsilon^{\mu}) = \gamma^{\nu\alpha\beta\mu}_{\sigma}.$$

В силу коммутативности и ассоциативности алгебры A эти коэффициенты можно представить следующим образом:

$$\gamma^{\nu\alpha\beta\mu}_{\sigma} = \varepsilon_{\sigma}(\gamma^{\nu\alpha\mu}_{\tau}\varepsilon^{\tau}\varepsilon^{\beta}) = \gamma^{\nu\alpha\mu}_{\tau}\gamma^{\tau\beta}_{\sigma}.$$

Поэтому из формул (2) получим

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\beta\tau}_{\sigma}\gamma^{\nu\alpha\mu}_{\tau}(\Gamma^{i}_{\nu jk})_{(\mu)}.$$

Отсюда в силу (5) следует, что

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\beta\tau}_{\sigma} \Gamma^{\alpha 0 i}_{jk\tau}.$$

Соотношения 1) доказаны. Остальные соотношения являются следствиями (1) и (4).

Пусть T^{sh}, R^{sh} — тензорные поля кручения и кривизны соответственно. Положим

$$T^{sh}(\partial^{\alpha}_{j}, \partial^{\beta}_{k}) = T^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} \partial^{\sigma}_{i}, \quad R^{sh}(\partial^{\alpha}_{k}, \partial^{\beta}_{l}) \partial^{\sigma}_{j} = R^{\sigma\alpha\beta i}_{jkl\tau} \partial^{\tau}_{i}.$$

Левые части этих равенств можно вычислить на основе равенств

$$T^{sh} = T^{(\alpha)}_{\alpha}, \ R^{sh} = R^{(\alpha)}_{\alpha}.$$

$$T^{sh}(\partial^{\alpha}_{j}, \partial^{\beta}_{k}) = T^{(\lambda)}_{\lambda}(\partial^{\alpha}_{i}, \partial^{\beta}_{k}) = (T_{\lambda}(\partial_{j}, \partial_{k}))^{(\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\alpha}\varepsilon^{\beta})} =$$

$$= \gamma^{\lambda\alpha\beta}_{\mu} (T^{i}_{\lambda jk} \partial_{i})^{\left(\varepsilon^{\mu}\right)} = \gamma^{\lambda\alpha\beta}_{\mu} (T^{i}_{\lambda jk})_{(\nu)} \partial^{\left(\varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\mu}\right)}_{i} = \gamma^{\lambda\alpha\beta\nu}_{\sigma} (T^{i}_{\lambda jk})_{(\nu)} \partial^{\sigma}_{i}.$$

Отсюда

$$T^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\lambda\alpha\beta\nu}_{\sigma} (T^{i}_{\lambda jk})_{(\nu)}. \tag{7}$$

Аналогично

$$R^{sh}(\partial^{\alpha}_{k}, \partial^{\beta}_{l}) \partial^{\sigma}_{j} = R^{(\lambda)}_{\lambda}(\partial^{\alpha}_{k}, \partial^{\beta}_{l}) \partial^{\sigma}_{j} = (R_{\lambda}(\partial_{k}, \partial_{l}) \partial_{j})^{(\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\alpha}\varepsilon^{\beta}\varepsilon^{\sigma})} =$$

$$= \gamma^{\lambda\alpha\beta\sigma}_{\mu} (R^{i}_{\lambda jkl} \partial_{i})^{\left(\varepsilon^{\mu}\right)} = \gamma^{\lambda\alpha\beta\sigma}_{\mu} (R^{i}_{\lambda jkl})_{(\nu)} \partial^{\left(\varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\mu}\right)}_{i} = \gamma^{\lambda\alpha\beta\sigma\nu}_{\tau} (R^{i}_{\lambda jkl})_{(\nu)} \partial^{\tau}_{i},$$

поэтому

$$R^{\sigma\alpha\beta i}_{jkl\tau} = \gamma^{\lambda\sigma\alpha\beta\nu}_{\tau} (R^{i}_{\lambda jkl})_{(\nu)}. \tag{8}$$

Если $\nabla^{sh} = \nabla^{(0)}$, то из (7) и (8) получим

$$T^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\alpha\beta\nu}_{\sigma} (T^{i}_{jk})_{(\nu)},$$

$$R^{\sigma\alpha\beta i}_{jkl\tau} = \gamma^{\sigma\alpha\beta\nu}_{\tau} (R^{i}_{jkl})_{(\nu)},$$

где T^{i}_{jk} — составляющие тензорного поля кручения T, R^{i}_{jkl} — составляющие тензорного поля кривизны связности ∇, заданной на базе M_n расслоения Вейля M^{A}.

Список литературы

1. *Широков А.П.* Замечание о структурах в касательных расслоениях // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1974. Т. 5. С. 311—318.

2. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. Казань, 1984.

3. *Султанов А.Я.* Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов. Математика. 1999. №9. С. 64—72.

4. *Султанов А.Я.* О вещественной реализации голоморфной линейной связности над алгеброй // ДГМФ. Калининград, 2007. Вып. 38. С. 136—139.

5. *Шурыгин В.В.* Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2002. Т. 73. С. 162—236.

MSC: 53B15

A. Ya. Sultanov[1], *G. A. Sultanova*[2]

[1] *Penza State University,*
40 Krasnaya St., Penza, 440026, Russia
[2] *Federal State-Owned Logistic Military Educational Institution*
named after General A. V. Khrulyov of the Ministry of Defence of the Russian Federation,
Penza-5, Penza region, 440000, Russia
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-11

On the local representation of synectic connections on Weil bundles

Submitted on May 30, 2022

Synectic extensions of complete lifts of linear connections in tangent bundles were introduced by A.P. Shirokov in the seventies of the last century [1; 2]. He established that these connections are linear and are real realizations of linear connections on first-order tangent bundles endowed with a smooth structure over the algebra of dual numbers. He also

proved the existence of a smooth structure on tangent bundles of arbitrary order $T^k(M)$ on a smooth manifold *M* over the algebra $R(\varepsilon^k)$ of plural numbers. Studying holomorphic linear connections on $T^k(M)$ over an algebra $R(\varepsilon^k)$, A. P. Shirokov obtained real realizations of these connections, which he called Synectic extensions of a linear connection defined on *M*. A natural generalization of the algebra of plural numbers is the A. Weyl algebra, and a generalization of the tangent bundle is the A. Weyl bundle. It was shown in [3] that a synectic extension of linear connections defined on *M* a smooth manifold can also be constructed on A. Weyl bundles M^{A}, where A is the A. Weyl algebra. The geometry of these bundles has been studied by many authors — A. Morimoto, V. V. Shurygin and others. A detailed analysis of these works can be found in [3].

In this paper, we study synectic lifts of linear connections defined on A. Weyl bundles.

Keywords: tangent bundle, Weyl algebra, synectic connection, curvature tensor field, torsion tensor field

References

1. *Shirokov, A. P.:* A note on structures in tangent bundles. Tr. Geom. Sem., 5, 311—318 (1974).

2. *Vishnevskiy, V. V., Shirokov, A. P., Shurygin, V. V.:* Spaces over algebras. Kazan (1984).

3. *Sultanov, A. Ya.:* Extensions of tensor fields and connections to Weil bundles. Izvestia Vuzov. Math., 9, 64—72 (1999).

4. *Sultanov, A. Ya.:* On the real realization of a holomorphic path connection over an algebra. DGMF. Kaliningrad. 38, 136—139 (2007).

5. *Shurygin, V. V.:* Smooth varieties over local algebras and Weil bundles. Itogi nauki i tekhn. Sovrem. math. and its app. Theme reviews, 73, 162—236 (2002).