УДК 514.75

Н. А. Елисеева[1]
[1] *Калининградский государственный технический университет, Россия*
ne2705@gmail.com

Построение поля плоскостей Нордена — Тимофеева гиперповерхности, оснащенной распределениями

В проективном пространстве продолжается исследование гиперповерхности, несущей тройку сильно взаимных подрасслоений. Построено поле инвариантных плоскостей Нордена — Тимофеева, внутренним образом присоединенное к гиперповерхности.

Ключевые слова: гиперповерхность, распределение, плоскость Картана, плоскость Кёнигса, точка Кёнигса, плоскость Нордена — Тимофеева.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$\sigma,\tau=\overline{1,n-1};\ p,q,t=\overline{1,r};\ u,v,w=\overline{r+1,n-1};$$

$$i,j=\overline{r+1,m};\ \alpha,\beta=\overline{m+1,n-1}.$$

В проективном пространстве P_n рассматривается гиперповерхность Ω_{n-1}, несущая тройку сильно взаимных (Λ, L, E)-подрасслоений [1]. Гиперповерхность Ω_{n-1} является специальным классом трехсоставного сильно взаимного распределения $VH\subset P_n$ [2] в случае, когда оснащающее H-подрасслоение голономно, при этом основные структурные подрасслоения VH-распределения связаны соотношениями

Поступила в редакцию 26.11.2017 г.

$$\varLambda_r(A_0) \subset M_m(A_0) \subset H_{n-1}(A_0),$$

$$M_m(A_0) = \left[\varLambda_r(A_0), L_s(A_0)\right],$$

$$\varPhi_{n-r-1}(A_0) = \left[\, L_s(A_0), E_{n-m-1}(A_0)\right],$$

$$\varPsi_{n-s-1}(A_0) = \left[\, \varLambda_r(A_0), E_{n-m-1}(A_0)\right],$$

$$\varPhi_{n-r-1}(A_0) \cap M_m(A_0) = L_s(A_0),$$

$$\varPsi_{n-s-1}(A_0) \cap M_m(A_0) = \varLambda_r(A_0),$$

где $\varPhi_{n-r-1}(A_0)$, $\varPsi_{n-s-1}(A_0)$, $E_{n-m-1}(A_0)$ — характеристики гиперплоскости $H(A_0)$ при смещениях центра A_0 вдоль интегральных кривых $\varLambda$-, L-, M-подрасслоений.

Построим поле оснащающих плоскостей Картана $\varPhi$-подрасслоения гиперповерхности $\varOmega_{n-1}$. Плоскость $L(A_0)$ пересекает многообразие $\varPhi^r_{n-r-1}(\nu)$ по фокальному многообразию $\varPhi^r_{s-1}(\nu)$ порядка r и размерности $s-1$, то есть $L(A_0) \cap \varPhi^r_{n-r-1}(A_0) = \varPhi^r_{s-1}(A_0)$:

$$x^p = 0,\ x^n = 0,\ x^\alpha = 0,\ \det\left\| x^0 \delta^p_q + \varLambda^p_{iq} x^i \right\| = 0. \qquad (1)$$

Линейная поляра l_{s-1} центра A_0 относительно многообразия $\varPhi^r_{s-1}$ (1) определяется уравнениями:

$$x^p = 0,\ x^n = 0,\ x^\alpha = 0,\ x^0 - \lambda^0_i x^i = 0, \qquad (2)$$

где $\lambda^0_i = -\dfrac{1}{r} \varLambda^p_{ip}$, $\nabla \lambda^0_i + \omega^0_i = \lambda^0_{i\sigma} \omega^\sigma_0$.

Плоскость $l_{s-1}(A_0)$ (2) может быть также получена, как пересечение плоскости Картана $C_{n-r-1}(A_0)$ Λ-подрасслоения и плоскости $L(A_0)$, то есть $l_{s-1}(A_0) = C_{n-r-1}(A_0) \cap L(A_0)$, причем уравнения плоскости Картана $C_{n-r-1}(A_0) \subset N_{n-r}(A_0)$ имеют вид

$$x^0 - \lambda_\nu^0 x^\nu - \nu_n^0 x^n = 0,\; x^p - \nu_n^p x^n = 0,$$

где $\lambda_\nu^0 = -\dfrac{1}{r}\Lambda_{\nu p}^p$, $\nabla\lambda_\nu^0 + \omega_\nu^0 = \lambda_{\nu\sigma}^0 \omega_0^\sigma$,

$$\nu_n^0 = -\frac{1}{r}(\nu_{np}^p - \Lambda_{tp}^n \nu_n^t \nu_n^p),\; \nabla\nu_n^0 + \nu_n^p \omega_p^0 - \lambda_\nu^0 \omega_n^\nu + \omega_n^0 = \nu_{n\sigma}^0 \omega_0^\sigma .$$

Плоскость $l_{s-1}(A_0)$ (2) является нормалью 2-го рода текущего элемента L-подрасслоения.

Аналогично определим плоскость

$$\varepsilon_{n-m-2}(A_0) = C_{n-r-1}(A_0) \cap E_{n-m-1}(A_0),$$

которая относительно локального репера R^1 задается уравнениями

$$x^p = 0,\; x^n = 0,\; x^i = 0,\; x^0 - \lambda_\alpha^0 x^\alpha = 0 \tag{3}$$

и является нормалью 2-го рода элемента E-подрасслоения в точке $A \in \Omega_{n-1}$.

Плоскость $\lambda_{n-r-2}(A_0) = [l_{s-1}(A_0), \varepsilon_{n-m-2}(A_0)]$, натянутая на плоскости $l_{s-1}(A_0)$ (2) и $\varepsilon_{n-m-2}(A_0)$ (3), задается уравнениями

$$x^n = 0,\; x^p = 0,\; x^0 - \lambda_\nu^0 x^\nu = 0,$$

то есть является осью оснащения Картана Λ-подрасслоения в данной точке $A \in \Omega_{n-1}$.

Найдем фокальное многообразие $\varphi_r^{n-r-1}(N_{r+1}, \Phi)$ нормали 1-го рода $N_{r+1}(A_0) = [\Lambda(A_0), \lambda_1(A_0)]$ элемента Ф-подрасслоения (Ф-плоскости):

$$\begin{cases} x^{v} - \nu_{n}^{v} x^{n} = 0, \\ \det\left\| \delta_{v}^{u} x^{0} + \Lambda_{pv}^{u} x^{p} + (\nu_{nv}^{u} - \Lambda_{wv}^{n} \nu_{n}^{w} \nu_{n}^{u}) x^{n} \right\| = 0, \end{cases} \tag{4}$$

полученное при смещениях центра A_0 вдоль интегральных кривых Ф-подрасслоения:

$$(\varphi): \begin{cases} \omega_0^n = 0, \omega_0^p = 0, \\ \omega_0^v = \mu^v \theta, d\theta = \theta \wedge \theta_0^0, \nabla \mu^v - \mu^v (\omega_0^0 + \theta_0^0) = \mu_1^v \theta. \end{cases}$$

Фокальное многообразие $\varphi_r^{n-r-1}(N_{r+1}, \Phi)$ представляет собой r-мерное алгебраическое многообразие порядка $n-r-1$, соответствующее нормали $N_{r+1}(A_0)$.

Линейную поляру $C_r(A_0)$ центра A_0 относительно фокального многообразия $\varphi_r^{n-r-1}(N_{r+1}, \Phi)$ (4) зададим уравнениями

$$\begin{cases} x^{v} - \nu_{n}^{v} x^{n} = 0, \\ x^{0} - \lambda_{p}^{0} x^{p} - \varphi_{n}^{0} x^{n} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $\lambda_p^0 = -\dfrac{1}{n-r-1} \Lambda_{pv}^v$, $\nabla \lambda_p^0 + \omega_p^0 = \lambda_{p\sigma}^0 \omega_0^\sigma$,

$$\varphi_n^0 = -\frac{1}{n-r-1} (\nu_{nv}^v - \Lambda_{uv}^n \nu_n^u \nu_n^v),$$

$$\nabla \varphi_n^0 + \nu_n^v \omega_v^0 - \lambda_p^0 \omega_n^p + \omega_n^0 = \varphi_{n\sigma}^0 \omega_0^\sigma.$$

Плоскость (5) является плоскостью Картана $C_r(\nu_n^v) \subset \subset N_{r+1}(A_0)$ [3] Φ-подрасслоения в данном центре A_0. При выборе другого поля инвариантных нормалей $\{\overset{*}{\nu}{}_n^v\}$ 1-го рода Φ-подрасслоения уравнения плоскости Картана в данной точке A_0 примут вид

$$x^{\nu} - \overset{*}{\nu}{}^{\nu}_{n} x^{n} = 0,\ x^{0} - \lambda^{0}_{p} x^{p} - \overset{*}{\varphi}{}^{0}_{n} x^{n} = 0,$$

где $\overset{*}{\varphi}{}^{0}_{n} = -\dfrac{1}{n-r-1}(\overset{*}{\nu}{}^{\nu}_{n\nu} - \Lambda^{n}_{u\nu} \overset{*}{\nu}{}^{u}_{n} \overset{*}{\nu}{}^{\nu}_{n})$,

$$\nabla \overset{*}{\varphi}{}^{0}_{n} + \overset{*}{\nu}{}^{\nu}_{n} \omega^{0}_{\nu} - \lambda^{0}_{p} \omega^{p}_{n} + \omega^{0}_{n} = \overset{*}{\varphi}{}^{0}_{n\sigma} \omega^{\sigma}_{0}.$$

Отсюда следует, что плоскость

$$\lambda_{r-1}(A_0) = [K_p] = [A_p + \lambda^{0}_{p} A_0]$$

есть ось оснащающих плоскостей Картана в нормалях 1-го рода $N_{r+1}(A_0)$ Ф-подрасслоения в данной точке $A_0 \in \Omega_{n-1}$:

$$x^{\nu} = 0,\ x^{n} = 0,\ x^{0} - \lambda^{0}_{p} x^{p} = 0. \tag{6}$$

Отсюда вытекает

Теорема 1. *Для пучка нормалей 1-го рода* $N_{r+1}(A_0)$ *плоскости* $\Phi(A_0)$ *в данном центре* $A_0 \in \Omega_{n-1}$ *все плоскости Картана этого пучка проходят через неподвижную плоскость* $\lambda_{r-1}(A_0)$ *(6) — ось пучка плоскостей Картана* $C_r(A_0)$ *плоскости* $\Phi(A_0)$.

Если охват объекта $\{\nu^{\nu}_{n}\}$ взять в виде $\nu^{\nu}_{n} \overset{def}{=} \Lambda^{\nu}_{n} = \dfrac{1}{r} \Lambda^{\nu}_{pq} \Lambda^{qp}_{n}$, $\nabla \Lambda^{\nu}_{n} + \omega^{\nu}_{n} = \Lambda^{\nu}_{n\sigma} \omega^{\sigma}_{0}$, то в данной точке $A_0 \in \Omega_{n-1}$ плоскость Картана $C_r(\Lambda^{\nu}_{n})$ (5) является плоскостью Кёнигса, а точка $\hat{K}_n = \lambda_1(A_0) \cap C_r(A_0)$ — точкой Кёнигса нормали $\{\Lambda^{\nu}_{n}\}$ и имеет строение вида $\hat{K}_n = \hat{\varphi}^{0}_{n} A_0 + \nu^{p}_{n} A_p + \Lambda^{\nu}_{n} A_{\nu} + A_n$, где

$$\hat{\varphi}^{0}_{n} = \varphi^{0}_{n} + \lambda^{0}_{p} \nu^{p}_{n},\ \nabla \hat{\varphi}^{0}_{n} + \Lambda^{\nu}_{n} \omega^{0}_{\nu} + \nu^{p}_{n} \omega^{0}_{p} + \omega^{0}_{n} = \hat{\varphi}^{0}_{n\sigma} \omega^{\sigma}_{0},$$

$$\lambda_1(A_0) = [A_0; X_n] = \lfloor A_0; A_n + \nu^{p}_{n} A_p + \Lambda^{\nu}_{n} A_{\nu} \rfloor,$$

$$\lambda_1(A_0) \subset N_{n-r}(A_0).$$

Плоскость $\lambda_{n-2}(A_0)=[\lambda_{n-r-2}(A_0);\lambda_{r-1}(A_0)]$, натянутую на ось $\lambda_{n-r-2}(A_0)$ пучка плоскостей Картана в нормалях 1-го рода $N_{n-r}(A_0)$ плоскости $\Lambda(A_0)$ и на ось $\lambda_{r-1}(A_0)$ оснащающих плоскостей Картана в нормалях 1-го рода $N_{r+1}(A_0)$ плоскости $\Phi(A_0)$, следуя работе [2], назовем плоскостью Нордена — Тимофеева [4] композиции $(\Lambda;\Phi)$. В локальном репере R^1 плоскость $\lambda_{n-2}(A_0)$ задается уравнениями

$$x^n=0\,,\ x^0-\lambda^0_\sigma x^\sigma=0\,, \tag{7}$$

где

$$\lambda^0_\sigma \stackrel{def}{=} \{\lambda^0_p;\lambda^o_\nu\}\,,\ \nabla\lambda^0_\sigma+\omega^0_\sigma=\lambda^0_{\sigma\tau}\omega^\tau_0\,. \tag{8}$$

Отметим, что поле инвариантных плоскостей $\lambda_{n-2}(A_0)$ Нордена — Тимофеева внутренним образом присоединено к гиперповерхности Ω_{n-1} в дифференциальной окрестности 2-го порядка. Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Неголономная композиция* $(\Lambda;\Phi)$ *взаимных Λ, Φ-подрасслоений в дифференциальной окрестности 2-го порядка порождает на гиперповерхности* Ω_{n-1} *поле ее внутренних нормалей 2-го рода в смысле Нордена — поле внутренних плоскостей Нордена — Тимофеева* $\lambda_{n-2}(A_0)$ *(7), определенное полем квазитензора* $\{\lambda^0_\sigma\}$ *(8). Построенное поле оснащающих плоскостей* $\lambda_{n-2}(A_0)$ *гиперповерхности* Ω_{n-1} *не зависит от выбора нормалей 1-го рода Λ, Φ-подрасслоений.*

Список литературы

1. *Елисеева Н.А.* Гиперповерхность проективного пространства, оснащенная распределениями // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2013. Вып. 44. С. 52—63.

2. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства : монография. СПб., 1992.

3. *Cartan E.* Les espaces a connexion projective // Тр. семинара по вект. и тензорн. анализу. М., 1937. Вып. 4. С. 147—159.

4. *Норден А.П., Тимофеев Г.Н.* Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств // Изв. вузов. Матем. 1972. №8 (123). С. 81—89.

N. Eliseeva[1]

[1] *Kaliningrad State Technical University*
1 Sovietsky Prospect, Kaliningrad, 36022, Russia
ne2705@gmail.com

Construction of the field of Norden — Timofeev planes of hypersurfacese quipped with distributions

Submitted on November 26, 2017

In the projective space the research of a hypersurface with three strongest mutual subbundles continues. The field of the invariant Norden — Timofeev planes is constructed that is internally attached to the hypersurface.

Keywords: hypersurface, distribution, Cartan plane, Koenigs plane, Koenigs point, Norden — Timofeev plane.

References

1. *Eliseeva, N.:* Hypersurfaces of projective space equipped with distributions. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 44, 52—63 (2013) (in Russian).

2. *Popov, Yu.:* Fundamentals of the theory of three-part distributions of projective space. St. Petersburg (1992) (in Russian).

3. *Cartan, E.:* Les espaces à connexion projective. Tr. Semin. Vektorn. Tenzorn. Anal., 4, 147—159 (1937).

4. *Norden, A.P., Timofeev, G.N.:* Invariant interpretations for special compositions of multidimensional spaces. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 8, 81—89 (1972) (in Russian).