

$$\left(\frac{mn}{mn-1} - n\right)R_{kj}^{\gamma\beta} + \left(n + \frac{1}{mn-1}\right)R_{jk}^{\beta\gamma} = 0. \quad (6)$$

Из соотношений (5) и (6) получаем, что  $R_{jk}^{\beta\gamma} = 0$ . Отсюда следует, что  $R_{ijk\sigma}^{\alpha\beta\gamma h} = 0$ . Таким образом, доказана

**Теорема.** Следующие условия эквивалентны:

- 1) пространство  $(M_{mn}^R, \nabla^R)$  — локально проективно плоское;
- 2) пространство  $(M_{mn}^R, \nabla^R)$  — локально плоское.

#### *Список литературы*

1. Вишневецкий В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. Пространства над алгебрами. Казань, 1984.

A. Sultanov

#### ON THE REAL REALIZATION OF HOLOMORPHIC LINEAR CONNECTION OVER AIGERRA

It is proved that real realization of the holomorphic linear connection is local projectively flat if and only if the connection  $\nabla$  is local flat.

УДК 514.75

*М. А. Чешкова*

*(Алтайский государственный университет)*

#### К ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ ЭННЕПЕРА

В евклидовом пространстве  $E^3$  изучается поверхность Эннепера. В процессе исследования используется система компьютерной математики Maple [1].

В евклидовом пространстве  $E^3$  рассмотрим поверхность Эннепера [2, с. 252]

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{4}(u^3 - 3u - 3uv^2), \\y &= \frac{1}{4}(3v + 3u^2v - v^3), \quad z = \frac{3}{4}(v^2 - u^2).\end{aligned}\tag{1}$$

Координаты первой  $g(g_{ij})$  и второй  $b(b_{ij})$  ( $i, j = 1, 2$ ) квадратичной форм [3, с. 108] имеют вид:

$$\begin{aligned}g_{11} = g_{22} &= \frac{9}{16}(u^2 + v^2 + 1), \quad g_{12} = g_{21} = 0, \\b_{11} = \frac{3}{2}, \quad b_{22} &= -\frac{3}{2}, \quad b_{12} = b_{21} = 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Так как  $g_{12} = 0$ ,  $b_{12} = 0$ , то координатные линии есть линии кривизны; главные кривизны поверхности  $k_1, k_2$  равны

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{b_{11}}{g_{11}} = \frac{8}{3}(u^2 + v^2 + 1)^{-2}, \\k_2 &= -\frac{b_{22}}{g_{22}} = -\frac{8}{3}(u^2 + v^2 + 1)^{-2}.\end{aligned}\tag{3}$$

Гауссова  $K = k_1 k_2$  и средняя  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  кривизны поверхности Эннепера примут вид:

$$K = -\frac{64}{9}(u^2 + v^2 + 1)^{-4}, \quad H = 0.\tag{4}$$

Так как  $H = 0$ , то поверхность минимальная. Минимальные поверхности моделируются с помощью мыльных пленок, натягивающих замкнутый проволочный контур.

Рассмотрим уравнения геодезической линии [4, с. 142]

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v,$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}).$$

поверхности Эннепера. Имеем:

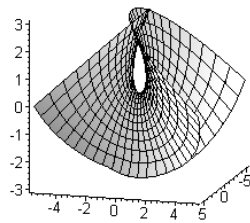
$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{2u(\frac{du}{ds})^2}{u^2 + v^2 + 1} + \frac{4v \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds}}{u^2 + v^2 + 1} - \frac{2u(\frac{dv}{ds})^2}{u^2 + v^2 + 1} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{2v(\frac{du}{ds})^2}{u^2 + v^2 + 1} + \frac{4u \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds}}{u^2 + v^2 + 1} + \frac{2v(\frac{dv}{ds})^2}{u^2 + v^2 + 1} = 0.$$

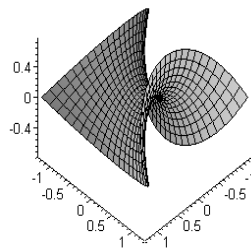
Замечаем, что линии кривизны  $\gamma_1 : u = 0, \gamma_2 : v = 0$  удовлетворяют системе (5), т.е. являются геодезическими. С другой стороны, геодезические линии кривизны есть плоские линии [5]. Плоские геодезические являются линиями симметрии поверхности Эннепера [6, с.34].

Из (5) следует, что гауссова кривизна в точках пересечения этих линий наименьшая.

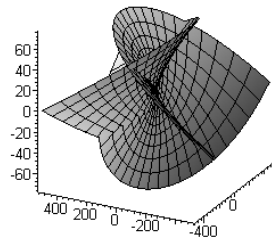
Используя математический пакет Maple 8, построим рассматриваемую поверхность и рассматриваемые линии:



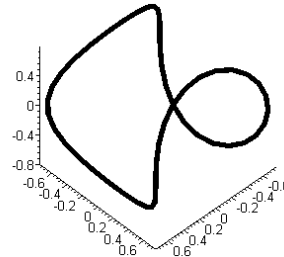
Поверхность Эннепера  
 $u = -1 \dots 1, v = -1 \dots 1$



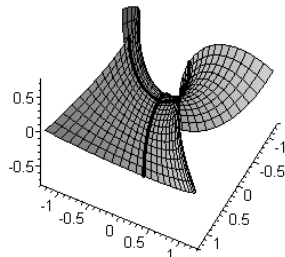
Поверхность Эннепера  
 $u = -2 \dots 2, v = -2 \dots 2$



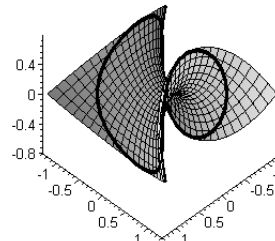
Поверхность Эннепера  
 $u=-10\dots 10, v=-10\dots 10$



Замкнутый контур



Плоские геодезические  
на поверхности Эннепера



Замкнутый контур  
на поверхности Эннепера

**Список литературы**

1. Васильев А. Н. Maple 8. М., 2003.
2. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия. М., 1963.
3. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М., 1969.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М., 1981.
5. Chen Bang-Yen, Verheyen Paul. Submanifolds with geodesic normal section // Mathematische Annalen. 1984. Т. 269. №3.
6. Минимальные поверхности / Под ред. Р. Оссерман. М., 2003.

M. Cheshkova

**TO GEOMETRIES OF SURFACE ENNEPER**

In Euclidean space are studied surface of Enneper. In the process of study is used system computer mathematics MAPLE.