Г.П.Т К А Ч

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНДУЦИРОВАННО РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ ФИГУР В $A_3$.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются пары $P$ конгруэнций фигур $F_1$ и $F_2$, где $F_1$ -парабола, а $F_2$ -прямая, не инцидентная плоскости параболы и не пересекающая параболу.

## § I. Канонический репер пары $P$.

Пусть $M_0$-точка пересечения прямой $F_2 \equiv \ell$ с плоскостью параболы. Отнесем пару $P$ к реперу $R=\{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $A$ -точка пересечения параболы $F_1$ с диаметром, проходящим через точку $M_0$, $\bar{e}_1=\overline{AM}_0$, вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной $\ell'$ к параболе в точке $A$, а вектор $\bar{e}_3$ —параллелен прямой $\ell$.

Деривационные формулы репера $R$ имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad d\bar{e}_\alpha=\omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3), \tag{1.1}$$

где формы Пфаффа $\omega_\alpha^\beta$ удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \quad \mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha. \tag{1.2}$$

Дифференцируя условие эквиаффинности

$$(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)=1, \tag{1.3}$$

получаем

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0. \tag{1.4}$$

При надлежащей нормировке вектора $\bar{e}_2$, уравнения параболы относительно репера $R$ примут вид:

$$(x^2)^2-2x^1=0, \quad x^3=0 \tag{1.5}$$

Используя условия стационарности точки в $A_3$

$$dx^\alpha=-x^\beta\omega_\beta^\alpha-\omega^\alpha, \tag{1.6}$$

$$d x^{\alpha} = - x^{\beta} \omega_{\beta}^{\alpha} - \omega^{\alpha}, \qquad (1.6)$$

находим уравнения, определяющие фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции $(F_1)$ [1]:

$$\left.\begin{aligned} &(x^2)^2 - 2x^1 = 0, \; x^3 = 0, \; x^1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 + \omega^3 = 0, \\ &(x^2)^2\omega_2^2 - x^1x^2\omega_1^2 + (\omega^2 - \omega_2^1)x^2 - \omega_1^1 x^1 - \omega^1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

Исключая случай параллельности прямой $\ell$ касательной плоскости к поверхности $(A)$, примем формы Пфаффа $\omega^1$, $\omega^2$ за независимые. Система дифференциальных уравнений, определяющих пару $P$, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^3 = \Gamma_{\kappa}^3 \omega^{\kappa}, \;\; \omega_i^3 = \Gamma_{i\kappa}^3 \omega^{\kappa}, \;\; \omega_3^i = \Gamma_{3\kappa}^i \omega^{\kappa}, \\ &\omega_j^i = \Gamma_{j\kappa}^i \omega^{\kappa}, \;\; \omega_j^j = \Gamma_{j\kappa}^j \omega^{\kappa}, \;\; (i,j,\kappa = 1,2) \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам $i, j$ суммирование не производится.

Замыкая систему (I.8), находим:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\Gamma_{\kappa}^3 \wedge \omega^{\kappa} = 0, \; \Delta\Gamma_{i\kappa}^3 \wedge \omega^{\kappa} = 0, \; \Delta\Gamma_{3\kappa}^i \wedge \omega^{\kappa} = 0, \\ &\Delta\Gamma_{j\kappa}^i \wedge \omega^{\kappa} = 0, \; \Delta\Gamma_{j\kappa}^j \wedge \omega^{\kappa} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} &\Delta\Gamma_i^3 = d\Gamma_i^3 + \Gamma_i^3(B\omega^j - \omega_i^i + \omega_3^3 + \Gamma_{ij}^3\omega^j), \\ &\Delta\Gamma_{ii}^3 = d\Gamma_{ii}^3 + \Gamma_{ii}^3(B\omega^j - 2\omega_i^i + \omega_3^3) + \Gamma_{ii}^j\Gamma_{jj}^3\omega^j, \\ &\Delta\Gamma_{ji}^3 = d\Gamma_{ji}^3 + \Gamma_{ji}^3(B\omega^j - \omega_{\kappa}^{\kappa} + \omega_3^3) + \Gamma_{ji}^i\Gamma_{ij}^3\omega^j, \\ &\Delta\Gamma_{3i}^i = d\Gamma_{3i}^i + \Gamma_{3i}^i(B\omega^j - \omega_3^3) + \Gamma_{3i}^j\Gamma_{jj}^i\omega^j, \\ &\Delta\Gamma_{3i}^j = d\Gamma_{3i}^j + \Gamma_{3i}^j(B\omega^j - \omega_i^i + \omega_j^j - \omega_3^3) + \Gamma_{3i}^i\Gamma_{ij}^j\omega^j, \\ &\Delta\Gamma_{ji}^i = d\Gamma_{ji}^i + \Gamma_{ji}^i(B\omega^j - \omega_j^j) + \Gamma_{ji}^3\Gamma_{3j}^i\omega^j, \\ &\Delta\Gamma_{ii}^j = d\Gamma_{ii}^j + \Gamma_{ii}^j(B\omega^j - 2\omega_i^i + \omega_j^j) + \Gamma_{ii}^3\Gamma_{3j}^j\omega^j, \\ &\Delta\Gamma_{ji}^j = d\Gamma_{ji}^j + \Gamma_{ji}^j(B\omega^j - \omega_i^i) + (\Gamma_{ji}^i\Gamma_{ij}^j + \Gamma_{ji}^3\Gamma_{3j}^j)\omega^j, \\ &B = \Gamma_{ji}^i - \Gamma_i^3\Gamma_{3j}^i + \Gamma_j^3\Gamma_{3i}^i. \end{aligned} \qquad (1.10)$$



Из (I.8),(I.9) непосредственно следует, что пара $P$ определяется с произволом девяти функций двух аргументов.

Матрица компонент деривационных формул репера $R$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \omega^1 & \omega^2, & \Gamma_{\kappa}^3\omega^{\kappa} \\ \Gamma_{1\kappa}^1\omega^{\kappa} & \Gamma_{1\kappa}^2\omega^{\kappa} & \Gamma_{1\kappa}^3\omega^{\kappa} \\ \Gamma_{2\kappa}^1\omega^{\kappa} & \Gamma_{2\kappa}^2\omega^{\kappa} & \Gamma_{2\kappa}^3\omega^{\kappa} \\ \Gamma_{3\kappa}^1\omega^{\kappa} & \Gamma_{3\kappa}^2\omega^{\kappa} & -(\Gamma_{1\kappa}^1 + \Gamma_{2\kappa}^2)\omega^{\kappa} \end{bmatrix}. \qquad (1.11)$$

§ 2. Индуцированно расслояемые пары $P$.

**Определение** I. Пара $P$ называется индуцированно расслояемой, или парой $P_\ell$, если прямолинейные конгруэнции $(\ell)$ и $(\ell')$ образуют двусторонне расслояемую пару [4]. Так как прямые $\ell'$ индуцированно расслояемой пары $P$ образуют двупараметрическое семейство (конгруэнцию), то ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & \Gamma_1^3 & \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^3 \\ 0 & \Gamma_2^3 & \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^3 \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

равен двум.

**Теорема** I. Пары $P_\ell$ существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

**Доказательство.** Условия двусторонней расслояемости прямолинейных конгруэнций $(\ell)$ и $(\ell')$ приводятся к виду:

$$\begin{aligned} &\omega^1 \wedge \omega_3^1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 = 0, \\ &(\omega^1 + \omega_1^1) \wedge \omega^3 + \omega_2^3 \wedge (\omega^2 + \omega_1^2) = 0, \\ &(\omega^1 + \omega_1^1) \wedge \omega_2^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \\ &(\omega^2 + \omega_1^2) \wedge \omega^1 + \omega_3^2 \wedge \omega^3 = 0, \\ &(\omega^2 + \omega_1^2) \wedge \omega_2^1 - \omega^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \\ &\omega^1 \wedge \omega_1^1 - \omega_3^2 \wedge \omega_2^3 = 0 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Учитывая (I.II), имеем:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Gamma^1_{32}-\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{32}+\Gamma^2_{31}\Gamma^1_{22}=0,\\
&(\Gamma^1_{11}+1)\Gamma^3_{2}+(\Gamma^2_{12}+1)\Gamma^3_{21}-\Gamma^1_{12}\Gamma^3_{1}-\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{11}=0,\\
&(\Gamma^1_{11}+1)\Gamma^1_{22}-\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{21}-\Gamma^3_{21}\Gamma^1_{32}+\Gamma^3_{22}\Gamma^1_{31}=0,\\
&\Gamma^2_{12}+1-\Gamma^2_{31}\Gamma^3_{2}+\Gamma^2_{32}\Gamma^3_{1}=0,\\
&(\Gamma^2_{12}+1)\Gamma^1_{21}-\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}+\Gamma^3_{1}\Gamma^1_{32}-\Gamma^3_{2}\Gamma^1_{31}=0,\\
&\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{31}\Gamma^3_{22}-\Gamma^2_{32}\Gamma^3_{21}=0.
\end{aligned}
\right. \qquad (2.3)
$$

Пары $P_\ell$ определяются уравнениями Пфаффа (I.8), квадратичными уравнениями (I.9) и конечными соотношениями (2.3). Из шести конечных соотношений (2.3) независимых только пять, следовательно

$$S_1=9,\quad q=13,\quad S_2=4,\quad N=Q=17. \qquad (2.4)$$

Система в инволюции и определяет пары $P_\ell$ с произволом четырех функций двух аргументов.

Пусть огибающая поверхность $(M_3)$ плоскостей парабол $F_1$ не является торсом. Тогда

$$\bar{M}_3=\bar{A}+\frac{1}{d_3}\{(\Gamma^3_2\Gamma^3_{21}-\Gamma^3_1\Gamma^3_{22})\bar{e}_1-(\Gamma^3_2\Gamma^3_{11}-\Gamma^3_1\Gamma^3_{12})\bar{e}_2\}, \qquad (2.5)$$

$$d=\Gamma^3_{11}\Gamma^3_{22}-\Gamma^3_{12}\Gamma^3_{21}\neq 0. \qquad (2.6)$$

Требуя, чтобы точка $A$ была характеристической точкой плоскости параболы, получим

$$\Gamma^3_1=\Gamma^3_2=0, \qquad (2.7)$$

или

$$\omega^3=0. \qquad (2.8)$$

Дифференцируя (2.8) внешним образом с учетом (I.8), находим:

$$\Gamma^3_{21}=\Gamma^3_{12}=\ell \qquad (2.9)$$

Из уравнений (I.7), для определения фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции $(F_1)$ видно, что если

$$\omega^1\wedge\omega^3=0, \qquad (2.10)$$

то точка $A$ является фокальной точкой параболы $F_1$. Отсюда следует, что если характеристическая точка плоскости параболы инцидентна параболе, то она является её фокальной точкой.



Уравнение асимптотических линий на поверхности $(A)$ имеет вид:

$$\Gamma^3_{11}(\omega^1)^2+2\ell\omega^1\omega^2+\Gamma^3_{22}(\omega^2)^2=0. \qquad (2.11)$$

Если потребовать, чтобы фокальная линия поверхности $(A)$ (линия $\omega^1=0$) и линия, огибаемая диаметрами параболы $AM_0$ (линия $\omega^2=0$), являлись асимптотическими линиями поверхности $(A)$, то

$$\Gamma^3_{11}-\Gamma^3_{22}=0. \qquad (2.12)$$

## § 3. Характеристические пары $P_\ell$.

Определение. 2. Пара $P_\ell$ называется характеристической, если точка $A$ – характеристическая точка плоскости параболы и линии $\omega^1=0$, $\omega^2=0$ являются асимптотическими линиями поверхности $(A)$.

Теорема 2. Характеристические пары $P_\ell$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Доказательство. Для характеристической пары выполняются соотношения (2.7) и (2.I2).

Рассмотрим сначала случай, когда точка $M_0$ не является характеристической точкой плоскости $x^2=0$. Тогда

$$\omega^2+\omega^2_1\neq 0. \qquad (3.1)$$

Из уравнений (2.2) находим:

$$\Gamma^1_{22}=0. \qquad (3.2)$$

Соотношения (3.2) и (2.I2) приводят к понижению ранга матрицы (2.I), чего быть не может.

Рассмотрим теперь случай, когда $M_0$ – характеристическая точка плоскости $x^2=0$. Имеем:

$$\omega^2+\omega^2_1=0. \qquad (3.3)$$

Введем обозначения:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11}=\mu,\ \Gamma^1_{21}=\beta,\ \Gamma^1_{22}=q,\ \Gamma^2_{21}=m,\\
&\Gamma^2_{22}=n,\ \Gamma^1_{31}=\gamma,\ \Gamma^1_{32}=\tau,\ \Gamma^2_{31}=c,\ \Gamma^2_{32}=a.
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.4)
$$

Замкнутая система уравнений, определяющих характеристическую пару $P_\ell$ приводится к виду :

$$1+\mu+bc=0, \quad cq-a\beta+\tau=0, \tag{3.5}$$

$$\left.\begin{array}{l}\omega^3=0,\ \omega^2+\omega^2_1=0,\ \omega^1_1=\mu\omega^1-ab\omega^2,\ \omega^3_1=b\omega^2,\ \omega^1_2=\beta\omega^1+q\omega^2,\\ \omega^2_2=m\omega^1+n\omega^2,\ \omega^3_2=b\omega^1,\ \omega^1_3=\gamma\omega^1+\tau\omega^2,\ \omega^2_3=c\omega^1+a\omega^2,\\ \frac{1}{2}\, d\ln b=(1+m+\mu)\omega^1-(ab+\beta-n)\omega^2\end{array}\right\} \tag{3.6}$$

$$\begin{array}{l}d\mu\wedge\omega^1-b\,da\wedge\omega^2-\{ab(3\mu+1+m)+\beta(1+\mu)-b\gamma\}\omega^1\wedge\omega^2=0,\\ d\beta\wedge\omega^1+dq\wedge\omega^2-\{q(1-\mu+2m)+\beta(\beta-n)+b\tau\}\omega^1\wedge\omega^2=0,\\ dm\wedge\omega^1+dn\wedge\omega^2-\{(ab+n)(1+m)+\beta(m-1)\}\omega^1\wedge\omega^2=0,\\ d\gamma\wedge\omega^1+d\tau\wedge\omega^2+\{2\tau\mu+\gamma(ab-\beta-n)\}\omega^1\wedge\omega^2=0,\\ dc\wedge\omega^1+da\wedge\omega^2-\{a(1-m-\mu)+c(2n+\beta)-\gamma\}\omega^1\wedge\omega^2=0,\\ db\wedge\omega^2+(b\gamma-\beta m)\omega^1\wedge\omega^2=0.\end{array} \tag{3.7}$$

Система (3.5)-(3.7) - в инволюции и определяет характеристич кую пару $P_\ell$ с произволом одной функции двух аргументов.

С л е д с т в и е 1. Точка $M_0$ характеристической па $P_\ell$ является характеристической точкой плоскости $x^2=0$.

Т е о р е м а 3. Существует только четыре фокальные повер ности конгруэнции $(F_1)$ характеристической пары $P_\ell$, причем фокальная поверхность $(A)$ является сдвоенной.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Утверждение теоремы непосред венно следует из рассмотрения уравнений (1.7) и (3.6).

С л е д с т в и е 2. В расширенном эвклидовом пространст две фокальные плоскости конгруэнции $(F_1)$ характеристической пары $P_\ell$ являются несобственными.

Т е о р е м а 4. Линия $\omega^2=0$ и линия $\omega^2_3=0$ (линия, вдол которой касательная к $\bar{e}_3$ параллельна плоскости $x^2=0$) -



асимптотические линии поверхности $(M_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Уравнение асимптотических линий поверхности $(M_0)$ приводится в силу (3.6) к виду :

$$a(\omega^2)^2+c\,\omega^1\omega^2=0. \tag{3.8}$$

Рассмотрим некоторые классы характеристической пары $P_\ell$.

О п р е д е л е н и е 3. Характеристическая пара $P_\ell$, у которой

$$c=0 \quad (3.$$

называется парой $P^1_\ell$.

Условие (3.8) означает, что асимптотическая линия $\omega^2=0$ поверхности $(A)$ высекается торсом прямолинейной конгруэнции $\{A\bar{e}_3\}$.

Пары $P^1_\ell$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов. Уравнения, определяющие пару $P^1_\ell$ имеют вид :

$$\left.\begin{array}{l}\omega^3=0,\ \omega^2+\omega^2_1=0,\ \omega^1+\omega^1_1=-ab\omega^2,\ \omega^3_1=b\omega^2,\ \omega^3_2=b\omega^1,\\ \omega^1_2=\beta\omega^1+q\omega^2,\ \omega^2_2=m\omega^1+n\omega^2,\ \omega^1_3=a\beta\omega^2,\ \omega^2_3=a\omega^2.\end{array}\right\} \tag{3.10}$$

Т е о р е м а 5. Поверхность $(M_0)$ пары $P^1_\ell$ вырождается в линию.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (3.9), находим:

$$dM_0=b(\bar{e}_3-a\bar{e}_1)\omega^2, \tag{3.11}$$

откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Т е о р е м а 6. Торсы $\omega^2=0$ прямолинейной конгруэнции $\{A,\bar{e}_3\}$ являются цилиндрическими поверхностями.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Используя (3.10), находим

$$(d\bar{e}_3)_{\omega^2=0}=-(1+m)\omega^1\bar{e}_3, \tag{3.12}$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

О п р е д е л е н и е 4. Пара $P^1_\ell$, у которой

$$q=\frac{3}{2} \tag{3.13}$$

называется парой $P^2_\ell$.

Подставляя (3.13) в (3.9), убеждаемся, что пары $P^2_\ell$ существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 7. Поверхность $(A)$ конгруэнции $(F_1)$ пары $P_\ell^2$ является строенной фокальной поверхностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (3.13) и (3.9), уравнения (1.7) примут вид :

$$(x^2)^2 - 2x^1 = 0, \quad x^3 = 0,$$
$$(x^2)^3 \left\{ (2m+3)x^2 - 2(a\theta + \beta + 2n) \right\} = 0,$$

что и доказывает теорему.

Л и т е р а т у р а.

1. В.С.Малаховский, Конгруэнции парабол в эквиаффинной геометрии. Труды Томского университета. Томск, 1962.

2. С.П.Фиников, Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, Москва, 1948г.

3. С.П.Фиников, Теория конгруэнций. ГИТТЛ, Москва, 1950г.

4. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, Москва, 1956г.

5. Р.Н.Щербаков, Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Издательство Томского университета. Томск, 1960г.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.

Ф.А.ЛИПАТОВА .

# КОНГРУЭНЦИИ ПАР ФИГУР В ТРЕХМЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ОБРАЗОВАННЫЕ ЭЛЛИПСОМ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном аффинном пространстве $A_3$ исследуются конгруэнции $K$ пар фигур, образованные эллипсом $C$ и точкой $M$, не инцидентной плоскости эллипса $C$.

## § 1. Система дифференциальных уравнений конгруэнции $K$.

Отнесем конгруэнцию $K$ к реперу $R \equiv \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $A$ -центр эллипса $C$, концы $A_1, A_2$ векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ -его фокальные точки, не принадлежащие одному диаметру, и $\bar{e}_3 = \overline{AM}$. Деривационные формулы репера $R$ имеют вид:

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \tag{1.1}$$

где формы Пфаффа $\omega^i$, $\omega_i^j$ удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{1.2}$$

Уравнения эллипса $C$ относительно репера $R$ имеют вид:

$$(x^1)^2 + 2\lambda x^1 x^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0, \quad |\lambda| < 1 \tag{1.3}$$

Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции $(C)$ определяются из системы уравнений [1]:

$$\left.\begin{aligned} &(x^1)^2 + 2\lambda x^1 x^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0, \\ &(\omega_1^1 + \lambda\omega_1^2)(x^1)^2 + (\omega_2^2 + \lambda\omega_2^1)(x^2)^2 + [-d\lambda + \omega_1^2 + \omega_2^1 + \lambda(\omega_1^1 + \omega_2^2)]\, x^1 x^2 + \\ &+ (\omega^1 + \lambda\omega^2)x^1 + (\omega^2 + \lambda\omega^1)x^2 = 0, \quad x^1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 + \omega^3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$