УДК 514.75

Н. А. Елисеева, Ю. И. Попов

О ПОСТРОЕНИЯХ В ГЕОМЕТРИИ $H(\Lambda, L)$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА[1]

Внутренним инвариантным образом построены нормализации Фосса и Грина в смысле Нордена. Заданы касательные аффинные и центроаффинные связности основных структурных подрасслоений $H(\Lambda, L)$-распределения аффинного пространства.

The authors construct Foss and Green's normalizations in Norden's sense internally invariantly. The research sets tangent affine connections and tangent central affine connections of the main structural subbundles of $H(\Lambda, L)$-distribution of affine space.

Ключевые слова: тензор, квазитензор, подрасслоение, расслоение, линейная поляра, соответствие Бомпьяни — Пантази, распределение, нормализация, аффинная связность, центроаффинная связность.

Keywords: tensor, quasitensor, subbundle, bundle, linear polar, Bompiani—Pantazi correspondence, distribution, normalization, affine connection, central affine connection.

1. Построение нормализаций Фосса и Грина основных структурных подрасслоений $H(\Lambda, L)$-распределения

1. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n, отнесенное к подвижному реперу $R_0 = \{A, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид

$$d\overline{A} = \omega^K \overline{e}_K, \; d\overline{e}_K = \omega_K^J \overline{e}_J, \tag{1.1}$$

а инвариантные формы ω^K и ω_K^J аффинной группы преобразований удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства A_n

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega_L^K, \; d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K. \tag{1.2}$$

[1] Настоящая статья является продолжением работы [1], поэтому используются терминология и обозначения данной работы.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2019. № 1. С. 5 – 17.

Известно [1], что относительно репера R_0 (нулевого порядка) $H(\Lambda, L)$-распределение задается уравнениями

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega^K, \ \omega_1^n = \Lambda_{1K}^n \omega^K, \ \omega_i^1 = \Lambda_{iK}^1 \omega^K, \ \omega_1^i = \Lambda_{1K}^i \omega^K, \tag{1.3}$$

где компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Gamma_1 = \{\Lambda_{iK}^n, \Lambda_{1K}^n, \Lambda_{iK}^1, \Lambda_{1K}^i\}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} \nabla\Lambda_{iK}^n = \Lambda_{iKL}^n \omega^L, \ \nabla\Lambda_{1K}^n = \Lambda_{1KL}^n \omega^L, \\ \nabla\Lambda_{iK}^1 + \Lambda_{iK}^n \omega_n^1 = \Lambda_{iKL}^1 \omega^L, \ \nabla\Lambda_{1K}^i + \Lambda_{1K}^n \omega_n^i = \Lambda_{1KL}^i \omega^L. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Для невырожденных тензоров 1-го порядка $\{\Lambda_{ij}^n\}$, $\{\Lambda_{11}^n\}$, $\{\Lambda_{\alpha\beta}^n\}$ введем *обращенные фундаментальные тензоры* [2] 1-го порядка $\{\Lambda_n^{ij}\}$, $\{\Lambda_n^{11}\}$, $\{\Lambda_n^{\alpha\beta}\}$ [1]:

$$\begin{gathered} \Lambda_{ij}^n \Lambda_n^{jk} = \delta_i^k, \ \Lambda_{ji}^n \Lambda_n^{kj} = \delta_i^k, \ \Lambda_{11}^n \Lambda_n^{11} = 1, \\ \Lambda_{\alpha\beta}^n \Lambda_n^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma, \ \Lambda_{\beta\alpha}^n \Lambda_n^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\gamma, \\ \nabla\Lambda_n^{ij} = \Lambda_{nK}^{ij} \omega^K, \ \nabla\Lambda_n^{11} = \Lambda_{nK}^{11} \omega^K, \ \nabla\Lambda_n^{\alpha\beta} = \Lambda_{nK}^{\alpha\beta} \omega^K. \end{gathered} \tag{1.5}$$

2. Определение. *Фокальной гиперплоскостью* [3] Λ-подрасслоения в центре A данного $H(\Lambda, L)$-распределения назовем всякую гиперплоскость $\psi(A)$, которая содержит две бесконечно близкие плоскости Λ-подрасслоения при смещении центра A вдоль некоторой интегральной кривой Λ-подрасслоения.

Так как $\Lambda(A) \subset \psi(A)$, то уравнение гиперплоскости $\psi(A)$ в локальном репере R_0 зададим в виде

$$\psi_1 x^1 + \psi_n x^n = 0. \tag{1.6}$$

В силу (1.1) – (1.3) имеем

$$d\overline{A}\big|_{\omega^1=\omega^n=0} = \omega^i \overline{e}_i, \ d\overline{e}_i\big|_{\omega^1=\omega^n=0} = \omega_i^j \overline{e}_j + \Lambda_{ij}^1 \omega^j \overline{e}_1 + \Lambda_{ij}^n \omega^j \overline{e}_n = 0. \tag{1.7}$$

Из (1.6), (1.7) следует, что для искомых интегральных кривых Λ-подрасслоения выполняются соотношения

$$\omega^1 = \omega^n = 0, \ (\psi_1 \Lambda_{ij}^1 + \psi_n \Lambda_{ij}^n)\omega^j = 0. \tag{1.8}$$

Система (1.8) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\det\left\| \psi_1 \Lambda_{ij}^1 + \psi_n \Lambda_{ij}^n \right\| = 0. \tag{1.9}$$

Итак, уравнение (1.9) задает геометрическое место фокальных гиперплоскостей — *фокальный гиперконус класса* $(n-2)$ [3], вершина которого есть $(n-2)$-плоскость $\Lambda(A)$.

Линейной полярой гиперплоскости $H(A)$ [4] относительно фокального гиперконуса (1.9) является связка гиперплоскостей

$$\psi_n + \frac{1}{n-2}\Lambda^1_{ij}\Lambda^{ji}_n\psi_1 = 0. \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) с учетом (1.6) представим в виде

$$(x^1 - \frac{1}{n-2}\Lambda^1_{ij}\Lambda^{ji}_n x^n)\psi_1 = 0$$

или

$$x^1 - \Phi^1_n x^n = 0. \tag{1.11}$$

Функция

$$\Phi^1_n = \frac{1}{n-2}\Lambda^1_{ij}\Lambda^{ji}_n,$$

согласно (1.4), (1.5) удовлетворяет уравнению

$$\nabla\Phi^1_n + \omega^1_n = \Phi^1_{nK}\omega^K. \tag{1.12}$$

Таким образом, линейной полярой гиперплоскости $H(A)$ [4] относительно фокального гиперконуса (1.9) является $(n-1)$-плоскость

$$\Phi_{n-1}(A) = [A, \overline{e}_i, \overline{e}_n + \Phi^1_n\overline{e}_1], \tag{1.13}$$

которая в локальном репере R_0 задается уравнением (1.11). Поле квазитензора Φ^1_n (1.12) 1-го порядка задает поле нормалей $\Phi_{n-1}(A)$ 1-го рода L-подрасслоения.

3. Аналогичные построения (см. п. 2) проведем для L-подрасслоения (распределения прямых $L(A)$). Уравнение искомой фокальной гиперплоскости $\xi(A)$ L-подрасслоения в репере R_0 зададим уравнением

$$\xi_i x^i + \xi_n x^n = 0. \tag{1.14}$$

Геометрическое место фокальных гиперплоскостей $\xi(A)$ (1.14) L-подрасслоения — *фокальный гиперконус класса 1*, вершиной которого служит прямая $L(A)$, — представим в виде

$$\det\left\|\xi_n\Lambda^n_{11} + \xi_i\Lambda^i_{11}\right\| = 0. \tag{1.15}$$

Линейной полярой гиперплоскости $H(A)$ [4] относительно гиперконуса (1.15) является связка гиперплоскостей

$$(x^i - \Lambda^i_{11}\Lambda^{11}_n x^n)\xi_i = 0,$$

которая определяет 2-плоскость

$$\Phi_2(A) = [A, \overline{e}_1, \overline{e}_n + \Phi^i_n\overline{e}_i], \tag{1.16}$$

где

$$\Phi_n^i = \Lambda_{11}^i \Lambda_n^{11}, \ \nabla \Phi_n^i + \omega_n^i = \Phi_{nK}^i \omega^K. \tag{1.17}$$

В локальном репере плоскость $\Phi_2(A)$ (1.16) задана уравнением

$$x^i = \Phi_n^i x^n. \tag{1.18}$$

Итак, поле квазитензора $\{\Phi_n^i\}$ (1.17) 1-го порядка задает поле 2-плоскостей $\Phi_2(A)$ (1.16) — поле нормалей 1-го рода Λ-подрасслоения.

Плоскости (1.13) и (1.16) пересекаются в каждом центре A по прямой

$$\Phi_1(A) = [A, \overline{\Phi}_1(A)]:$$
$$\Phi_1(A) = \Phi_{n-1}(A) \cap \Phi_2(A), \ \overline{\Phi}_1 = \overline{e}_n + \Phi_n^\alpha \overline{e}_\alpha, \tag{1.19}$$

где

$$\{\Phi_n^\alpha\} = \{\Phi_n^1, \Phi_n^i\}, \ \nabla \Phi_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \Phi_{nK}^\alpha \omega^K. \tag{1.20}$$

Следуя работам [3; 5; 6], прямую $\Phi_1(A)$ (1.19) назовем *нормалью Фосса* $H(\Lambda, L)$-распределения в центре A. Соответственно, плоскости $\Phi_{n-1}(A)$ (1.13) и $\Phi_2(A)$ (1.16) назовем *нормалями Фосса 1-го рода в смысле Нордена* [7] L-, Λ-подрасслоений данного $H(\Lambda, L)$-распределения. Согласно биекциям Бомпьяни — Пантази [1] полям нормалей Фосса $\{\Phi_n^1\}$, $\{\Phi_n^i\}$, $\{\Phi_n^\alpha\}$ 1-го рода поставим в соответствие поля *нормалей 2-го рода Фосса* $\{\Phi_1\}$, $\{\Phi_i\}$, $\{\Phi_\alpha\}$, где

$$\Phi_1 \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{11}^n \Phi_n^1 + \tilde{\mathcal{A}}_1, \ \nabla \Phi_1 = \Phi_{1K} \omega^K,$$
$$\Phi_i \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{ij}^n \Phi_n^j + \tilde{\mathcal{A}}_i, \ \nabla \Phi_i = \Phi_{iK} \omega^K,$$
$$\Phi_\alpha \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{\alpha\beta}^n \Phi_n^\beta + \tilde{\mathcal{A}}_\alpha, \ \nabla \Phi_\alpha = \Phi_{\alpha K} \omega^K.$$

В результате справедлива

Теорема 1. *Нормаль Фосса* $\Phi_1(A)$ *H-подрасслоения (или* $H(\Lambda, L)$*-распределения) в каждом центре A есть пересечение линейных поляр гиперплоскости* $H(A)$ *относительно фокальных гиперконусов* (1.9) *и* (1.15) *соответственно L-, Λ-подрасслоений.*

$H(\Lambda, L)$*-распределение внутренним инвариантным образом порождает нормализации Фосса*

$$(\Phi_n^1, \Phi_1), \ (\Phi_n^i, \Phi_i), \ (\Phi_n^\alpha, \Phi_\alpha)$$

соответственно L-, Λ-, H-подрасслоений в дифференциальной окрестности первого порядка.

4. Пусть задано поле нормалей 1-го рода $\mathcal{N}_1$ H-распределения:

$$\mathcal{N}_1 = [A, \overline{\nu}_n = \nu_n^\alpha \overline{e}_\alpha + \overline{e}_n], \ \nabla \nu_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \nu_{nK}^\alpha \omega^K. \tag{1.21}$$

Рассмотрим фокальные образы, связанные с Λ-, L-подрасслоениями данного $H(\Lambda, L)$-распределения.

Найдем фокальное многообразие $\mathcal{F}(\nu_2, \Lambda)$ нормали 1-го рода

$$\nu_2(A) = [A, \overline{\nu}_n, L(A)]$$

плоскости $\Lambda(A)$ при смещении центра A вдоль кривых

$$(\lambda): \omega^i = \mu^i\theta, \nabla\mu^i - \mu^i\theta_1 = \mu_1^i\theta, D\theta = \theta\wedge\theta_1, \omega^1 = 0, \omega^n = 0, \qquad (1.22)$$

принадлежащих Λ-подрасслоению.

Пусть F — фокальная точка плоскости $\nu_2(A)$. Из условия ее фокальности

$$d\overline{F} = \vartheta^1\overline{e}_1 + \vartheta^n(\nu_n^i\overline{e}_i + \nu_n^1\overline{e}_1 + \overline{e}_n)$$

в силу соотношений (1.1)—(1.3), (1.21), (1.22), в частности, имеем

$$[\delta_j^i + y^1\nu_{1j}^i + y^n(\nu_{nj}^i - \Lambda_{\alpha j}^n\nu_n^\alpha\nu_n^i + \Lambda_{1j}^i\nu_n^1)]\omega^j = 0, \qquad (1.23)$$

где

$$\nu_{1j}^i = \Lambda_{1j}^i - \Lambda_{1j}^n\nu_n^i, \ \ \nabla\nu_{1j}^i \equiv 0.$$

Нетривиальное решение (относительно форм ω^j) система (1.23) имеет тогда и только тогда, когда определитель системы (1.23) равен нулю. Отсюда следует, что фокальной многообразие $\mathcal{F}(\nu_2, \Lambda)$ задается уравнениями

$$y^i = \nu_n^i y^n, \ \det\left\|\delta_j^i + y^1\nu_{1j}^i + y^n(\nu_{nj}^i - \Lambda_{\alpha j}^n\nu_n^\alpha\nu_n^i + \Lambda_{1j}^i\nu_n^1)\right\| = 0, \qquad (1.24)$$

то есть является алгебраическим многообразием размерности один порядка $(n-2)$.

Линейная поляра центра A $H(\Lambda, L)$-распределения относительно фокального многообразия $\mathcal{F}(\nu_2, \Lambda)$ (1.24) есть прямая $K_1(A) \subset \nu_2(A)$:

$$y^i = \nu_n^i y^n, \ \tilde{\nu}_1 y^1 + \nu_n y^n - 1 = 0, \qquad (1.25)$$

где

$$\tilde{\nu}_1 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-2}\nu_{1i}^i, \ \nabla\tilde{\nu}_1 = \tilde{\nu}_{1K}\omega^K,$$

$$\nu_n \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-2}(\nu_{ni}^i - \Lambda_{\alpha i}^n\nu_n^\alpha\nu_n^i + \Lambda_{1i}^i\nu_n^1), \ \nabla\nu_n = \nu_{nK}\omega^K.$$

Отметим, что прямая $K_1(A)$ (1.25) — прямая Кёнигса (аналог плоскости Кёнигса [8]) элемента Λ-подрасслоения (Λ-плоскости) в данном центре A.

Точку пересечения прямых $K_1(A)$ и $N_1(A)$, то есть точку

$$K_n(\nu): y^\alpha = \frac{\nu_n^\alpha}{\tilde{\nu}_1\nu_n^1 + \nu_n}, \; y^n = \frac{1}{\tilde{\nu}_1\nu_n^1 + \nu_n},$$

назовем $\nu\Lambda$-*виртуальной точкой Кёнигса* [5].

Найдем точку пересечения прямых $K_1(A)$ (1.25) и $L(A)$:

$$K_1(A) \cap L(A) = K_0 : y^i = 0, \; y^n = 0, \; \tilde{\nu}_1 y^1 = \frac{1}{\tilde{\nu}_1}. \qquad (1.26)$$

Таким образом, прямая $K_1(\nu) = [K_0, K_n(\nu)]$, где точка K_0, с одной стороны — νL-*виртуальная точка Кёнигса* [5], а с другой — нормаль 2-го рода Нордена прямой $L(A)$ в центре A $H(\Lambda, L)$-распределения.

5. Аналогично (см. п. 4) находим в каждом центре A фокальное многообразие $\mathcal{F}(\nu_{n-1}, L)$:

$$y^1 = \nu_n^1 y^n, \; \det\left\| \delta_1^1 + y^i \nu_{i1}^1 + y^n(\nu_{n1}^1 - \Lambda_{11}^n \nu_n^1 \nu_n^1 + \nu_{i1}^1 \nu_n^i) \right\| = 0, \qquad (1.27)$$

где

$$\nu_{i1}^1 = \Lambda_{i1}^1 - \Lambda_{i1}^n \nu_n^1, \; \nabla \nu_{i1}^1 \equiv 0. \qquad (1.28)$$

Фокальное многообразие (1.27) принадлежит нормали 1-го рода $\nu_{n-1}(A)$ прямой $L(A)$ и получено при смещении центра A вдоль кривых

$$(\mathcal{L}): \omega^1 = \mu^1\theta, \nabla\mu^1 - \mu^1\theta_1 = \tilde{\mu}_1^1\theta, D\theta = \theta \wedge \theta_1, \omega^i = 0, \omega^n = 0, \qquad (1.29)$$

принадлежащих L-подрасслоению.

Линейная поляра центра A относительно фокального многообразия $\mathcal{F}(\nu_{n-1}, L)$ (1.27) есть плоскость

$$K_{n-2}(A): y^1 = \nu_n^1 y^n, \; \tilde{\nu}_i y^i + \tilde{\nu}_n y^n - 1 = 0, \qquad (1.30)$$

где

$$\begin{gathered} \tilde{\nu}_i = -\nu_{i1}^1, \; \nabla \tilde{\nu}_i = \tilde{\nu}_{iK}\omega^K, \\ \tilde{\nu}_n = -(\nu_{n1}^1 - \Lambda_{11}^n \nu_n^1 \nu_n^1 + \nu_{i1}^1 \nu_n^i), \; \nabla \tilde{\nu}_n = \tilde{\nu}_{nK}\omega^K. \end{gathered} \qquad (1.31)$$

Плоскость $K_{n-2}(A)$ (1.30) назовем νL-*виртуальной плоскостью Кёнигса* плоскости $\nu_{n-1}(A)$.

Пересечение многообразия (1.27) с плоскостью $\Lambda(A)$ представляет собой фокальное многообразие $\mathcal{F}(\Lambda, L)$ плоскости $\Lambda(A)$:

$$y^1 = 0, \; y^n = 0, \; \det\left\| \delta_1^1 + y^i \nu_{i1}^1 \right\| = 0, \qquad (1.32)$$

полученное при смещении центра A вдоль кривых $(\mathcal{L})$ (1.29).

Линейная поляра центра A относительно фокального многообразия (1.32) есть плоскость

$$K_{n-3}(A): y^1 = 0, \; y^n = 0, \; \tilde{\nu}_i y^i - 1 = 0. \qquad (1.33)$$

Плоскость $K_{n-3}(A)$ (1.33) назовем *νL-виртуальной плоскостью Кёнигса* плоскости $\Lambda(A)$.

Рассмотрим $(n-2)$-плоскость $\mathfrak{Q}_{n-2}(A)$, проходящую через плоскость $K_{n-3}(A)$ и точку K_0:

$$y^n = 0,\ \mathfrak{Q}_\alpha y^\alpha - 1 = 0, \tag{1.34}$$

где

$$\mathfrak{Q}_i = \tilde{\nu}_i,\ \ \mathfrak{Q}_1 = \tilde{\nu}_1.$$

Следуя работам [7; 9], плоскость $\mathfrak{Q}_{n-2}(A)$ назовем *νH-виртуальной плоскостью Грина H*-подрасслоения, так как задание плоскости $\mathfrak{Q}_{n-2}(A)$ зависит от выбора нормали $\{\nu_n^\alpha\}$ 1-го рода H-подрасслоения.

Если задано поле нормалей Фосса $\{\Phi_n^\alpha\}$ H-подрасслоения, то охват тензора $\{\tilde{\mathfrak{Q}}_\alpha\}$ согласно (1.28), (1.31) можно представить в виде

$$\mathfrak{Q}_1 = -(\Lambda_{1i}^i - \Lambda_{1i}^n \Phi_n^i) \overset{\text{def}}{=} G_1,\ \ \mathfrak{Q}_i = -(\Lambda_{i1}^1 - \Lambda_{i1}^n \Phi_n^1) \overset{\text{def}}{=} G_i \tag{1.35}$$

в дифференциальной окрестности 1-го порядка. В этом случае в силу работ [7; 9] плоскость (1.34) назовем *ребром Грина* $G_{n-2}(A)$ H-подрасслоения:

$$y^n = 0,\ G_\alpha y^\alpha - 1 = 0,$$

где

$$\tilde{\mathfrak{Q}}_i \overset{\text{def}}{=} G_i,\ \ \tilde{\mathfrak{Q}}_1 \overset{\text{def}}{=} G_1.$$

В соответствии Бомпьяни — Пантази [1, п. 2] нормали 2-го рода Грина $\{G_\alpha\}$ соответствует нормаль 1-го рода $\{G_n^\alpha\}$, где

$$G_n^\alpha = \Lambda_n^{\alpha\beta} G_\beta + \mathcal{A}_n^\alpha,$$

которую назовем *нормалью 1-го рода Грина* $\{G_n^\alpha\}$ H-подрасслоения. Отметим, что νH-виртуальной нормали 2-го рода Грина H-подрасслоения $\{G_\alpha\}$ (1.34) в биекции Бомпьяни — Пантази соответствует νH-виртуальная нормаль 1-го рода $\{\mathfrak{Q}_n^\alpha\}$, где

$$\mathfrak{Q}_n^\alpha = \Lambda_n^{\alpha\beta} \mathfrak{Q}_\beta + \mathcal{A}_n^\alpha.$$

Нормализация (G_n^α, G_α) Грина H-подрасслоения индуцирует внутренним образом нормализации (G_n^i, G_i), (G_n^1, G_1) соответственно Λ-, L-подрасслоений, где

$$G_n^i = \Lambda_n^{ij} G_j + \tilde{\mathcal{A}}_n^i,\ \ G_n^1 = \Lambda_n^{11} G_1 + \tilde{\mathcal{A}}_n^1.$$

Итак, выполняется

Теорема 2. *$H(\Lambda, L)$-распределение внутренним инвариантным образом порождает нормализацию $(\Phi^{\alpha}_{n}, G_{\alpha})$ Фосса – Грина H-подрасслоения и нормализации*

$$(G^{\alpha}_{n}, G_{\alpha}), (G^{i}_{n}, G_{i}), (G^{1}_{n}, G_{1})$$

Грина соответственно H-, Λ-, L-подрасслоений в дифференциальной окрестности 1-го порядка, а νH-виртуальную нормализацию Грина $(\mathfrak{Q}^{\alpha}_{n}, \mathfrak{Q}_{\alpha})$ – в дифференциальной окрестности порядка t (порядок окрестности t определяется порядком дифференциальной окрестности квазитензора $\{\nu^{\alpha}_{n}\}$).

2. Задание касательных аффинных и центроаффинных связностей на основных структурных подрасслоениях $H(\Lambda, L)$-распределения

1. Адаптируем репер R_0 полю нормалей $\overline{\nu}(A)$ 1-го рода H-подрасслоения, то есть пусть вектор $\overline{e}_n \parallel \overline{\nu}(A)$. В этом случае

$$\omega^{i}_{n} = \Lambda^{i}_{nK}\omega^{K}, \ \ \omega^{1}_{n} = \Lambda^{1}_{nK}\omega^{K}, \tag{2.1}$$

а поле нормалей 1-го рода $\mathcal{N}_1(A)$ задано уравнениями

$$\nabla\Lambda^{\alpha}_{nK} = \Lambda^{\alpha}_{nKL}\omega^{L}. \tag{2.2}$$

Таким образом, уравнения (1.4), (1.5), (2.1), (2.2) задают $H(\Lambda, L)$-распределение, оснащенное полем нормалей $\mathcal{N}_1(A)$ 1-го рода.

При фиксации точки $A \overset{\text{def}}{=} x$ (центра распределения) прямая $\mathcal{N}_1(x)$ (нормаль 1-го рода гиперплоскости $H_{n-1}(x)$) и гиперплоскость $H_{n-1}(x)$ (элемент H-подрасслоения) остаются неподвижными. Следовательно, на базе A_n (аффинное n-пространство) возникают нормальное расслоение $\mathcal{N}_1(A_n)$ и касательное расслоение $\mathcal{T}_{n-1}(A_n)$ [10], где $\mathcal{N}_1(A_n)$ – расслоение прямых $\mathcal{N}_1(x)$, а $\mathcal{T}_{n-1}(A_n)$ – расслоение гиперплоскостей H_x. Кроме того, мы имеем еще две пары взаимных расслоений:

а) касательное расслоение $\mathcal{T}_{n-2}(A_n)$ (расслоение плоскостей Λ_x) и нормальное расслоение $\mathcal{N}_2(A_n)$ (расслоение нормалей $\mathcal{N}_2(x)$ 1-го рода Λ-подрасслоения данного $H(\Lambda, L)$-распределения);

б) касательное расслоение $\mathcal{T}_1(A_n)$ (расслоение прямых L_x) и нормальное расслоение $\mathcal{N}_{n-1}(A_n)$ (расслоение нормалей $\mathcal{N}_{n-1}(x)$ 1-го рода L-подрасслоения $H(\Lambda, L)$-распределения).

2. Структурные уравнения касательного расслоения $\mathcal{T}_{n-1}(A_n)$ в силу (1.4), (1.2), (2.1) имеют вид

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J, \ d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^j + \Omega_j^i, \ d\omega_1^1 = \Omega_1^1,$$
$$d\omega_1^i = \omega_1^\alpha \wedge \omega_\alpha^i + \Omega_1^i, \ d\omega_i^1 = \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^1 + \Omega_i^1,$$
$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \delta_{[K}^n \Lambda_{|n|L]}^\alpha \omega^K \wedge \omega^L = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + R_{KL}^\alpha \omega^K \wedge \omega^L,$$

где

$$\begin{aligned}
\Omega_j^i &= \omega_j^1 \wedge \omega_1^i + \omega_j^n \wedge \omega_n^i = (\Lambda_{j[K}^1 \Lambda_{|1|L]}^i + \Lambda_{j[K}^n \Lambda_{|n|L]}^i)\omega^K \wedge \omega^L = \\
&= R_{jKL}^i \omega^K \wedge \omega^L, \\
\Omega_1^1 &= \omega_1^i \wedge \omega_i^1 + \omega_1^n \wedge \omega_n^1 = (\Lambda_{1[K}^i \Lambda_{|i|L]}^1 + \Lambda_{1[K}^n \Lambda_{|n|L]}^1)\omega^K \wedge \omega^L = \\
&= R_{1KL}^1 \omega^K \wedge \omega^L, \\
\Omega_1^i &= \omega_1^n \wedge \omega_n^i = \Lambda_{1[K}^n \Lambda_{|n|L]}^i \omega^K \wedge \omega^L = \\
&= R_{1KL}^i \omega^K \wedge \omega^L, \\
\Omega_i^1 &= \omega_i^n \wedge \omega_n^1 = \Lambda_{i[K}^n \Lambda_{|n|L]}^1 \omega^K \wedge \omega^L = \\
&= R_{iKL}^1 \omega^K \wedge \omega^L,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
R_{jKL}^i &= \Lambda_{j[K}^1 \Lambda_{|1|L]}^i + \Lambda_{j[K}^n \Lambda_{|n|L]}^i, \\
R_{1KL}^1 &= \Lambda_{1[K}^i \Lambda_{|i|L]}^1 + \Lambda_{1[K}^n \Lambda_{|n|L]}^1, \\
R_{1KL}^i &= \Lambda_{1[K}^n \Lambda_{|n|L]}^i, \ R_{iKL}^1 = \Lambda_{i[K}^n \Lambda_{|n|L]}^1,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$R_{KL}^\alpha = \delta_{[K}^n \Lambda_{|n|L]}^\alpha. \tag{2.5}$$

Аналогично найдем с учетом (1.4), (1.2), (2.1) структурные уравнения *нормального расслоения* $\mathcal{N}_1(A_n)$:

$$\begin{aligned}
d\omega^J &= \omega^K \wedge \omega_K^J, \\
d\omega_n^n &= \Omega_n^n = \omega_n^1 \wedge \omega_1^n + \omega_n^i \wedge \omega_i^n = \\
&= (\Lambda_{n[K}^1 \Lambda_{|1|L]}^n + \Lambda_{n[K}^i \Lambda_{|i|L]}^n)\omega^K \wedge \omega^L = R_{nKL}^n \omega^K \wedge \omega^L,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$R_{nKL}^n = \Lambda_{n[K}^1 \Lambda_{|1|L]}^n + \Lambda_{n[K}^i \Lambda_{|i|L]}^n. \tag{2.7}$$

В силу соотношений (2.3) — (2.7), следуя работам [10; 11], приходим к выводу.

Теорема 3. *H*(Λ, *L*)*-распределение внутренним образом порождает:*

а) в касательном расслоении $\mathcal{T}_{n-1}(A_n)$ *аффинную связность* γ *с кручением* R_{KL}^α (2.5)*, слоевыми формами связности которой являются*

$$\omega^\alpha, \omega_j^i, \omega_1^1, \omega_1^i, \omega_i^1,$$

и 2-формами кривизны (2.3)*, причем компоненты тензора кривизны* $\{R_{\beta KL}^\alpha\}$ *связности* γ *имеют строение* (2.4);

б) в нормальном расслоении $\mathcal{N}_1(A_n)$ *центроаффинную связность* $\gamma^\perp$ *с формой связности* ω_n^n *и 2-формой кривизны* Ω_n^n (2.6), *тензор кривизны* $\{R_{nKL}^n\}$ *которой имеет структуру* (2.7).

Связность $\gamma^\perp$ назовем *нормальной центроаффинной связностью*, а связность γ — *касательной аффинной связностью* оснащенного H-подрасслоения данного $H(\Lambda, L)$-распределения.

3. Аналогично (см. п. 2) можно ввести *центроаффинную связность* $\eta^\perp$ в расслоении $\mathcal{N}_2(A_n)$ нормалей 1-го рода плоскостей Λ_x и аффинную связность η в расслоении $\mathcal{T}_{n-2}(A_n)$ плоскостей Λ_x. Действительно, структурные уравнения нормального расслоения $\mathcal{N}_2(A_n)$ имеют следующее строение ($a, b = \{1, n\}$):

$$\begin{gathered} d\omega_1^1 = \Omega_1^1,\ d\omega_1^n = \omega_1^a \wedge \omega_a^n + \Omega_1^n, \\ d\omega_n^1 = \omega_n^a \wedge \omega_a^1 + \Omega_n^1,\ d\omega_n^n = \Omega_n^n, \end{gathered} \tag{2.8}$$

где

$$\begin{gathered} \Omega_1^1 = (\Lambda_{1[K}^i \Lambda_{|i|L]}^1 + \Lambda_{1[K}^n \Lambda_{|n|L]}^1)\omega^K \wedge \omega^L = R_{1KL}^1 \omega^K \wedge \omega^L, \\ \Omega_1^n = \omega_1^i \wedge \omega_i^n = \Lambda_{1[K}^i \Lambda_{|i|L]}^n \omega^K \wedge \omega^L = R_{1KL}^n \omega^K \wedge \omega^L, \\ \Omega_n^1 = \omega_n^i \wedge \omega_i^1 = \Lambda_{n[K}^i \Lambda_{|i|L]}^1 \omega^K \wedge \omega^L == R_{nKL}^1 \omega^K \wedge \omega^L, \\ \Omega_n^n = \omega_n^i \wedge \omega_i^n + \omega_n^1 \wedge \omega_1^n = (\Lambda_{n[K}^i \Lambda_{|i|L]}^n + \Lambda_{n[K}^1 \Lambda_{|1|L]}^n)\omega^K \wedge \omega^L = \\ = R_{nKL}^n \omega^K \wedge \omega^L, \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} R_{1KL}^1 = \Lambda_{1[K}^i \Lambda_{|i|L]}^1 + \Lambda_{1[K}^n \Lambda_{|n|L]}^1,\ R_{1KL}^n = \Lambda_{1[K}^i \Lambda_{|i|L]}^n, \\ R_{nKL}^1 = \Lambda_{n[K}^i \Lambda_{|i|L]}^1,\ R_{nKL}^n = \Lambda_{n[K}^i \Lambda_{|i|L]}^n + \Lambda_{n[K}^1 \Lambda_{|1|L]}^n. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Структурные уравнения соответствующего касательного расслоения $\mathcal{T}_{n-2}(A_n)$ в силу формул (1.4), (1.2), (2.1) имеют вид

$$\begin{gathered} d\omega^K = \omega^L \wedge \omega_L^K,\ d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + R_{KL}^i \omega^K \wedge \omega^L, \\ d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \Omega_j^i, \end{gathered} \tag{2.11}$$

где

$$R_{KL}^i = \delta_{[K}^1 \Lambda_{|1|L]}^i + \delta_{[K}^n \Lambda_{|n|L]}^i, \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered} \Omega_j^i = \omega_j^1 \wedge \omega_1^i + \omega_j^n \wedge \omega_n^i = (\Lambda_{j[K}^1 \Lambda_{|1|L]}^i + \Lambda_{j[K}^n \Lambda_{|n|L]}^i)\omega^K \wedge \omega^L = \\ = R_{jKL}^i \omega^K \wedge \omega^L, \end{gathered} \tag{2.13}$$

$$R_{jKL}^i = \Lambda_{j[K}^1 \Lambda_{|1|L]}^i + \Lambda_{j[K}^n \Lambda_{|n|L]}^i. \tag{2.14}$$

В результате с учетом соотношения (2.8)—(2.14) согласно работам [10; 11] имеет место

Теорема 4. *$H(\Lambda, L)$-распределение внутренним образом индуцирует:*

а) в нормальном расслоении $\mathcal{N}_2(A_n)$ центроаффинную связность $\eta^\perp$ с формами связности

$$\omega_1^1,\ \omega_1^n,\ \omega_n^1,\ \omega_n^n$$

и 2-формами кривизны (2.9), *компоненты тензора кривизны $\{R^a_{bKL}\}$ которой имеют строение* (2.10);

б) в соответствующем касательном расслоении $\mathcal{T}_{n-2}(A_n)$ (в расслоении плоскостей Λ_x) аффинную связность η с кручением R^i_{KL} (2.12), *2-формой кривизны* (2.13) *и тензором кривизны* (2.14).

Связность $\eta^\perp$ назовем *нормальной центроаффинной связностью* (в расслоении нормалей $\mathcal{N}_2(x)$ 1-го рода) Λ-подрасслоения, а связность η — *касательной аффинной связностью* Λ-подрасслоения данного $H(\Lambda, L)$-распределения.

4. Введем в рассмотрение *центроаффинную связность* $\vartheta^\perp$ в расслоении $\mathcal{N}_{n-1}(A_n)$ нормалей 1-го рода L-подрасслоения.

Структурные уравнения нормального расслоения $\mathcal{N}_{n-1}(A_n)$ представим в виде ($\tilde{i}, \tilde{k} = \{i, n\}$):

$$D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^i + \Omega_i^j,\ \ d\omega_n^j = \omega_n^{\tilde{i}} \wedge \omega_{\tilde{i}}^j + \Omega_n^j,$$
$$d\omega_j^n = \omega_j^{\tilde{k}} \wedge \omega_{\tilde{k}}^n + \Omega_j^n,\ \ d\omega_n^n = \Omega_n^n, \tag{2.15}$$

где

$$\Omega_i^j = \omega_i^1 \wedge \omega_1^j + \omega_i^n \wedge \omega_n^j = (\Lambda^1_{i[K}\Lambda^j_{|1|L]} + \Lambda^n_{i[K}\Lambda^j_{|n|L]})\omega^K \wedge \omega^L =$$
$$= R^j_{iKL}\omega^K \wedge \omega^L,$$
$$\Omega_n^j = \omega_n^1 \wedge \omega_1^j = \Lambda^1_{n[K}\Lambda^j_{|1|L]}\omega^K \wedge \omega^L =$$
$$= R^j_{nKL}\omega^K \wedge \omega^L,$$
$$\Omega_j^n = \omega_j^1 \wedge \omega_1^n = \Lambda^1_{j[K}\Lambda^n_{|1|L]}\omega^K \wedge \omega^L = \tag{2.16}$$
$$= R^n_{jKL}\omega^K \wedge \omega^L,$$
$$\Omega_n^n = \omega_n^1 \wedge \omega_1^n + \omega_n^i \wedge \omega_i^n = (\Lambda^1_{n[K}\Lambda^n_{|1|L]} + \Lambda^i_{n[K}\Lambda^n_{|i|L]})\omega^K \wedge \omega^L =$$
$$= R^n_{nKL}\omega^K \wedge \omega^L,$$

$$R^j_{iKL} = \Lambda^1_{i[K}\Lambda^j_{|1|L]} + \Lambda^n_{i[K}\Lambda^j_{|n|L]},$$
$$R^j_{nKL} = \Lambda^1_{n[K}\Lambda^j_{|1|L]},\ \ R^n_{jKL} = \Lambda^1_{j[K}\Lambda^n_{|1|L]}, \tag{2.17}$$
$$R^n_{nKL} = \Lambda^1_{n[K}\Lambda^n_{|1|L]} + \Lambda^i_{n[K}\Lambda^n_{|i|L]}.$$

Для нормального расслоения $\mathcal{N}_{n-1}(A_n)$ соответствующее касательное расслоение $\mathcal{T}_1(A_n)$ есть расслоение прямых L_x (L-подрасслоение), структурные уравнения которого имеют следующий вид:

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega_L^K, \; d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega_1^1 + R_{KL}^1 \omega^K \wedge \omega^L, \\ d\omega_1^1 = \Omega_1^1 = R_{1KL}^1 \omega^K \wedge \omega^L, \tag{2.18}$$

где

$$R_{KL}^1 = \delta_{[K}^n \Lambda_{|n|L]}^1 + \delta_{[K}^i \Lambda_{|i|L]}^1. \tag{2.19}$$

Из соотношений (2.15)—(2.19) согласно работам [10; 11] следует

Теорема 5. *В расслоении* $\mathcal{N}_{n-1}(A_n)$ *нормалей 1-го рода L-подрасслоения H(Λ, L)-распределение индуцирует центроаффинную связность* $\vartheta^{\perp}$, *слоевыми формами которой являются формы*

$$\omega_i^j, \omega_n^j, \omega_j^n, \omega_n^n,$$

2-формами кривизны — (2.16), *а компоненты тензора кривизны имеют строение* (2.17).

В касательном расслоении $\mathcal{T}_1(A_n)$ *прямых* L_x *H(Λ, L)-распределение индуцирует внутреннюю аффинную связность* ϑ *с кручением* R_{1KL}^1 (2.19), *2-формой кривизны* Ω_1^1, *тензор кривизны* $\{R_{1KL}^1\}$ *которой имеет строение* (2.10).

Связность $\vartheta^{\perp}$ назовем *нормальной центроаффинной связностью*, а связность ϑ — *касательной аффинной связностью* оснащенного Λ-подрасслоения данного H(Λ, L)-распределения.

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Нормализация основных структурных подрасслоений H(Λ, L)-распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2018. №3. С. 5—16.

2. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.

3. *Акивис М.А.* Фокальные образы поверхности ранга r // Изв. вузов. Математика. 1957. №1. С. 9—19.

4. *Ивлев Е.Т., Лучинин А.А.* О полярном соответствии относительно алгебраической поверхности и его приложениях // Геом. сб. Томск, 1968. Т. 7. С. 23—24.

5. *Попов Ю.И.* Нормализации Фосса и Грина гиперполосного распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. №4. С. 16—23.

6. *Попов Ю.И.* Нормализации Фосса и Грина $H(L)$-распределения аффинного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 86—95.

7. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

8. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара. М., 1973. Т. 4. С. 71—120.

9. *Благонравов В.В.* Распределения на гиперповерхности аффинного пространства // Деп. в ВИНИТИ РАН 17.08.1982, №4552-82.

10. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1990.

11. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геом. семинара. М., 1973. Т. 4. С. 7—70.

Об авторах

Наталья Александровна Елисеева — канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

Юрий Иванович Попов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

The authors

Dr Natalia A. Eliseeva, Associate Professor, Kaliningrad State Technical University, Russia.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

Dr Juriy I. Popov, Professor, I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru