УДК 514.76

К ГЕОМЕТРИИ ОТОБРАЖЕНИЯ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПОНИЖЕННОГО РАНГА

А.А.Рылов

(Московский государственный педагогический институт)

В теории гладких отображений дифференцируемых многообразий известны понятие ранга отображения, теорема о ранге (см., например, [2], с.66-67). В настоящей статье изучаются геометрические свойства гладких отображений римановых многообразий пониженного ранга; получены необходимые условия того, чтобы данное отображение пониженного ранга было конформным (в частности, гомотетическим) или эквиобъемным.

I. Пусть (M, g) и $(\overline{M}, \overline{g})$ - два римановых многообразия с метрическими тензорами g и $\overline{g}$; $\dim M = n$, $\dim \overline{M} = m$. Структурные уравнения форм римановой связности на M в общем репере имеют вид:

$$\begin{cases} \mathcal{D}\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad \mathcal{D}\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + R^I_{JKL}\omega^K \wedge \omega^L, \\ dg_{IJ} - g_{IK}\omega_J^K - g_{KJ}\omega_I^K = 0 \quad (I, J, K, L = \overline{1,n}), \end{cases} \tag{I}$$

где $\{\omega^I\}$ - базис дифференциальных форм, двойственный реперу $\{\vec{e}_J\}$. Структурные уравнения форм римановой связности на $\overline{M}$ в общем репере записываются аналогично:

$$\begin{cases} \mathcal{D}\overline{\omega}^A = \overline{\omega}^B \wedge \overline{\omega}_B^A, \quad \mathcal{D}\overline{\omega}_B^A = \overline{\omega}_B^C \wedge \overline{\omega}_C^A + \overline{R}^A_{BCD}\overline{\omega}^C \wedge \overline{\omega}^D, \\ d\overline{g}_{AB} - \overline{g}_{AC}\overline{\omega}_B^C - \overline{g}_{CB}\overline{\omega}_A^C = 0 \quad (A, B, C, D = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{2}$$

где $\{\overline{\omega}^A\}$ - базис форм, двойственный реперам $\{\vec{\varepsilon}_B\}$.

Пусть $dV = \sqrt{\det \| g_{IJ} \|}\, \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$ - элемент объема, построенный на векторах $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$; и соответственно $d\overline{V} = \sqrt{\det \| \overline{g}_{AB} \|}\, \overline{\omega}^1 \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}^m$ - элемент объема, построенный на векторах $\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_m$.

2. Пусть задано гладкое отображение римановых многообразий $f: (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$, дифференциальные уравнения которого имеют вид:

$$\overline{\omega}^A = h_J^A \omega^J. \tag{3}$$

Продолжая эту систему, получим:

$$dh_J^A - h_K^A \omega_J^K + h_J^B \overline{\omega}_B^A = h_{JL}^A \omega^L, \quad h_{JL}^A = h_{LJ}^A. \tag{4}$$

Величины h_J^A и h_{JL}^A являются относительными компонентами фундаментальных объектов первого и второго порядка, порожденных отображением f [1].

Отображение f индуцирует на многообразии (M, g) поле тензора g^* с компонентами $g^*_{IJ} = h_I^A h_J^B \overline{g}_{AB}$. Если $g^* = \varphi g$, то отображение f называется конформным (при $\varphi = const > 0$ - гомотетическим, при $\varphi = 1$ - изометрическим) [4]. Если $\det \| g^*_{IJ} \| = \det \| g_{IJ} \|$, то отображение f будем называть эквиобъемным.

Все дальнейшие рассмотрения имеют локальный характер (речь идет о некоторой области $\Omega \subset M$ и соответствующей ей области $f(\Omega) \subset \overline{M}$); индексы принимают значения: $i, j, k, \ell = \overline{1,r}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{r+1,n}$; $a, b, c = \overline{r+1,m}$.

3. Пусть T_x и $T_{f(x)}$ - касательные пространства к многообразиям M и $\overline{M}$ в соответствующих точках $x \in \Omega$ и $f(x)$. Ранг дифференциала отображения $f_{*x}: T_x \to T_{f(x)}$ называется рангом отображения f в точке x. Тогда требование $r = \operatorname{rang} \| h_J^A \| < \min(n, m)$ для всех точек области Ω выделяет класс отображений $f: (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ пониженного ранга r. В каждой точке $x \in \Omega$ дифференциал f_{*x} имеет $(n-r)$-мерное ядро $\Delta_{n-r}(x) \subset T_x$, а в соответствующей точке $f(x)$ получаем r-мерный образ $\overline{\Delta}_r(f(x)) \subset T_{f(x)}$. Выберем подвижные реперы $R^x = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha)$, $R^{f(x)} = (f(x), \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_a)$ следующим образом: $\vec{e}_\alpha \in \Delta_{n-r}(x)$, $\vec{e}_i \perp \Delta_{n-r}(x)$, $\vec{\varepsilon}_i = f_{*x}(\vec{e}_i) \in \overline{\Delta}_r(f(x))$, $\vec{\varepsilon}_a \perp \overline{\Delta}_r(f(x))$. Теперь компоненты h_J^A приведутся к виду:

$$h_i^j = \delta_i^j, \quad h_i^b = h_\alpha^j = h_\alpha^b = 0, \tag{5}$$

и дифференциальные уравнения (3) записываются следующим образом:

$$\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}^a = 0. \tag{6}$$

Подстановка компонент (5) объекта h_J^A в систему уравнений (4) дает следующие соотношения:

$$\overline{\omega}_i^j = \omega_i^j + h_{ik}^j \omega^k + h_{i\alpha}^j \omega^\alpha, \tag{7}$$

$$\overline{\omega}_i^a = h_{ik}^a \omega^k, \tag{8}$$

$$\omega_\alpha^j = -h_{\alpha k}^j \omega^k - h_{\alpha\beta}^j \omega^\beta, \tag{9}$$

$$h_{\alpha k}^b = 0, \quad h_{\alpha\gamma}^b = 0. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что $\overline{\omega}^a = 0$, $\overline{\omega}_i^a = h_{ik}^a \overline{\omega}^k$ является системой дифференциальных уравнений образа $f(\Omega)$ как r-мерного подмногообразия риманова пространства $(\overline{M}, \overline{g})$, причем на этом подмногообразии индуцирована метрика $\overline{g}$.

Система уравнений (9) представляет собой дифференциальные уравнения голономного распределения $\operatorname{Ker} f_*$ элементов $\Delta_{n-r}(x)$ ядра дифференциала f_{*x}. Максимальные интегральные многообразия распределения $\operatorname{Ker} f_*$ будем называть слоями отображения f.

В силу выбора реперов R^x и $R^{f(x)}$ имеем: $g_{i\alpha} = 0$, $\overline{g}_{ia} = 0$. Подстановка этих условий в структурные уравнения (I) и (2), в частности, дает следующие соотношения:

$$dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0, \quad d\overline{g}_{ij} - \overline{g}_{ik}\overline{\omega}_j^k - \overline{g}_{kj}\overline{\omega}_i^k = 0, \tag{11}$$
$$\overline{\omega}_i^\beta = -g^{\alpha\beta} g_{ik} \omega_\alpha^k$$

С учетом соотношений (9) система уравнений (II) примет вид:

$$\omega_i^\beta = \Lambda_{ij}^\beta \omega^j + \Lambda_{i\gamma}^\beta \omega^\gamma, \qquad (I2)$$

где $\Lambda_{ij}^\beta = g^{\alpha\beta} g_{i\ell} h_{\alpha j}^{\ell}$, $\quad \Lambda_{i\gamma}^\beta = g^{\alpha\beta} g_{i\ell} h_{\alpha\gamma}^{\ell}$.

Система (I2) представляет собой дифференциальные уравнения распределения $Ker\, f_*^\perp$ элементов $\Delta^\perp(x)$, ортогональных слоям отображения f. Будем называть $Ker\, f_*^\perp$ горизонтальным распределением, а векторы, лежащие в площадках, $\Delta^\perp(x)$-горизонтальными. Уравнения (I2) показывают, что горизонтальное распределение в общем случае неголономно.

4.Пусть $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ -конформное отображение пониженного ранга r. В согласованных реперах условие конформности имеет вид:

$$\overline{g}_{ij} = \varphi g_{ij}, \qquad \varphi = \varphi(x). \qquad (I3)$$

Конформное отображение f пониженного ранга сохраняет меру угла между двумя любыми горизонтальными векторами; изометрическое отображение f пониженного ранга (при $\varphi = 1$) будет сохранять также длину всякого горизонтального вектора. Эти факты непосредственно следуют из соответствующих определений [3 ,с.49,52].

Распределение Δ на многообразии (M,g) называется вполне геодезическим [5 ,с.150], если его вторая фундаментальная форма обращается в нуль. Вторая фундаментальная форма омбилического распределения Δ [5 ,с.151] пропорциональна его метрической форме. Наконец, распределение Δ называется минимальным [5 ,с.151], если свертка его второй фундаментальной формы с компонентами метрического тензора дает нуль. Исходя из системы уравнений (I2) заключаем, что вторая фундаментальная форма θ горизонтального распределения $Ker\, f_*^\perp$ действует по закону

$$\theta(\vec{X},\vec{Y}) = \Lambda_{(ij)}^{\alpha} X^i Y^j \vec{e}_\alpha \qquad (I4)$$

для произвольных горизонтальных векторов $\vec{X} = X^i \vec{e}_i$ и $\vec{Y} = Y^j \vec{e}_j$. Пользуясь условиями (I2), соотношениями (I3) и (I4), можно доказать, что справедливы

Т е о р е м а 1. Если $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ -конформное отображение пониженного ранга, то горизонтальное распределение $Ker\, f_*^\perp$ является омбилическим.

С л е д с т в и е. Если $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ -гомотетическое отображение пониженного ранга, то горизонтальное распределение $Ker\, f_*^\perp$ является вполне геодезическим.

5.Пусть $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ -эквиобъемное отображение пониженного ранга r. Условие эквиобъемности в согласованных реперах принимает вид:

$$\det \|\overline{g}_{ij}\| = \det \|g_{ij}\|, \qquad (I5)$$

откуда следует, что эквиобъемное отображение пониженного ранга сохраняет элемент объема горизонтальной площадки, натянутой на векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r$. Исходя из условия (I5), с помощью соотношений (I2) и (I4) доказывается

Т е о р е м а 2. Если $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ -эквиобъемное отображение пониженного ранга, то горизонтальное распределение $Ker\, f_*^\perp$ является минимальным.

Библиографический список

1.Л а п т е в Г.Ф. Инвариантная аналитическая теория дифференцируемых отображений//Тр.Междунар.конгр.математиков.Ницца,1970.С.84-85.

2.Н а р а с и м х а н Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях.М.:Мир,1971.

3. Э й з е н х а р т Л.П. Риманова геометрия.М.:ИЛ,1948.

4. Yano K., Ishihara S. Harmonic and relatively affine mappings // J. Dif. Geom. 1975. V.10. N4. P. 501-509.

5. Reinhart B.L. Differential geometry of foliations. Springer-Verlag. 1983.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ЛИНЕЙЧАТОЙ КВАДРИКОЙ И ПРЯМОЙ

Е.В.С к р ы д л о в а

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются вырожденные конгруэнции [1], образованные линейчатой квадрикой Q и прямой ℓ, в которых квадрика Q описывает однопараметрическое семейство, а прямая ℓ -прямолинейную конгруэнцию. Такие конгруэнции названы конгруэнциями $(Q\ell)_{1,2}$. Изучен класс конгруэнций $(Q\ell)_{1,2}$, характеризующийся двусторонним расслоением конгруэнции (ℓ) и ассоциированной с ней прямолинейной конгруэнции (ℓ').

Трехмерное проективное пространство P_3 отнесем к подвижному реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, в котором вершины A_0 и A_3 являются точками пересечения прямой ℓ с соответствующей ей линейчатой квадрикой Q, а вершины A_1 и A_2 совпадают с точками пересечения прямолинейных образующих квадрики Q, проходящих через A_0 и A_3. Прямую A_1A_2 назовем ℓ'. Относительно построенного репера квадрику Q и прямую ℓ можно задать соответственно уравнениями

$$x^0x^3 - x^1x^2 = 0, \qquad (I)$$