УДК 514.75

М. А. Чешкова
Алтайский государственный университет, Барнаул
cma41@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-7

Преобразование Бианки псевдосферы

Исследуется преобразование Бианки для поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Поверхностями вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны являются волчок Миндинга, катушка Миндинга, псевдосфера (поверхность Бельтрами). Также к поверхностям постоянной отрицательной гауссовой кривизны относятся поверхность Куэна и поверхность Дини. Изучение поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны (псевдосферических поверхностей) имеет большое значение для интерпретаций планиметрии Лобачевского. Известна связь геометрических характеристик псевдосферических поверхностей с теорией сетей, теорией солитонов, нелинейными дифференциальными уравнениями и уравнениями синус-Гордона. Преобразования Бианки позволяют получить по данной псевдосферической поверхности новые псевдосферические поверхности.

С использованием математического пакета построены псевдосфера и ее преобразования Бианки.

Ключевые слова: гауссова кривизна, поверхность вращения, псевдосфера, поверхность Куэна, преобразование Бианки

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M, полученную вращением плоской кривой вокруг оси.

Поступила в редакцию 06.03.2023 г.

Обозначим через $k = (0,0,1)$ орт оси, а через $e(v) = (\cos(v), \sin(v), 0)$ — радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси. Тогда поверхность M можно задать в виде

$$r = ue(v) + f(u)k\,, \tag{1}$$

где f — дифференцируемая функция, u, v— параметры.

Обозначим через n орт нормали к поверхности M. Тогда

$$n = \frac{f'e-k}{\sqrt{(f')^2+1}}. \tag{2}$$

Главные кривизны k_1 k_2 поверхности M имеют вид

$$k_1 = -\frac{f'}{u\sqrt{(f')^2+1}},\ k_2 = -\frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2+1}\right)^3}$$

Гауссова кривизна $\mathrm{K}=k_1k_2$ равна

$$K = \frac{f'}{u\sqrt{(f')^2+1}}\frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2+1}\right)^3}.$$

Требуем $K = const$, получим решение

$$f(u) = \pm\int\sqrt{\frac{Ku^2-(c-1)}{c-Ku^2}}du,$$

где c — произвольная константа.

Поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны — это волчок Миндинга $0 < c < 1$, катушка Миндинга $c < 0$, псевдосфера $c = 0$ [1, с. 100; 2, с. 175].

Полагаем $K = -1,\ c = 0$ и выбираем знак «плюс».

Имеем

$$f(u) = \int\sqrt{\frac{-u^2+1}{u^2}}du. \tag{3}$$

Определим метрический тензор g_{ij} и символы Кристоффеля Γ_{ij}^k.

Имеем

$$r_1 = r_u = e(v) + \sqrt{\frac{-u^2+1}{u^2}}\ k, \quad r_2 = r_v\ = ue'(v),$$

$$g_{11} = \frac{1}{u^2}, \ g_{12} = 0, \ g_{22} = u^2.$$

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{u}\ , \ \Gamma^1_{22} = -u^3, \ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{u}. \tag{4}$$

Остальные Γ^k_{ij} равны нулю.

Рассмотрим две гладкие поверхности $M, \bar{M}$ и диффеоморфизм $f: M \to \bar{M}$. Касательные плоскости в соответствующих точках $p \in M, f(p) \in \bar{M}$ пересекаются по прямой $(p, f(p))$, образуя прямой двугранный угол, причем вектор $\overrightarrow{pf(p)} = \rho V_p$, где V_p — орт, $\rho = const$. Обозначим через n орт нормали к поверхности M в точке $p \in M$. Тогда касательная плоскость к поверхности $\bar{M}$ в точке $f(p) \in \bar{M}$ имеет вид $T_{f(o)}\bar{M} = \{f(p, n, V_p)\}$. Теорема Бианки утверждает, что если поверхность M имеет гауссову кривизну $K = -\frac{1}{\rho^2}$, то и поверхность $\bar{M}$ имеет ту же кривизну.

Обозначим через r радиус-вектор поверхности M, а через R — радиус-вектор поверхности $\bar{M}$. Полагаем $K = -1$ и рассмотрим отображение $f: M \to \overline{M}$ [2, с. 489].

Имеем $R = r - V, \ V = V^s r_s$.

Из условия $< R_i[n, v] > = 0$ получим

$$r_i - \partial_i V = \omega(r_i)V + \alpha(r_i)n.$$

Так как $< \mathrm{V}, \mathrm{V} > = 1, < \partial_i V, V > = 0$, то

$$\omega(r_i) = < r_i\ , V>, \ \ \nabla_i \mathrm{V} = r_i - \ \omega(r_i)V.$$

Имеем

$$\nabla_1\ V^1 = 1 - g_{11}(V^1)^2, \ \nabla_1\ V^2 = -g_{11}V^1V^2,$$
$$\nabla_2\ V^1 = -g_{22}V^1V^2, \ \nabla_2\ V^2 = 1 - g_{22}(V^2)^2. \tag{5}$$

Формулы (5) в силу (4) примут вид

$$\partial_u V^1 - \frac{V^1}{u} = 1 - \frac{(V^1)^2}{u^2}, \quad \partial_u V^2 + \frac{V^2}{u} = -\frac{V^1 V^2}{u^2}, \tag{6}$$

$$\partial_v V^1 - u^3 V^2 = -u^2 V^1 V^2, \partial_v V^2 + \frac{V^1}{u} = 1 - u^2 (V^2)^2.$$

Система (6) имеет решение

$$V^1 = \frac{(u^2(C_1 v^2 - 2C_2 + 2v) - C_1)u}{u^2(C_1 v^2 - 2C_2 + 2v) + C_1},$$

$$V^2 = \frac{2C_1 v + 2}{u^2(C_1 v^2 - 2C_2 + 2v) + C_1},$$

$C_1, C_2 - const.$

Потребуем, чтобы $< V, V > = 1$. Тогда $2C_1 C_2 + 1 = 0$.

Введем обозначение $c_1 = 1/C_1$. Имеем

$$V^1 = \frac{(u^2(c_1 + v)^2 - 1)u}{u^2(c_1 + v)^2 + 1}, \tag{7}$$

$$V^2 = \frac{2(c_1 + v)}{u^2(c_1 + v)^2 + 1}.$$

Положим $u = \sin(t)$. В силу (3) $f(t) = \cos(t) + \ln(tg\left(\frac{t}{2}\right))$ и псевдосфера имеет уравнение $r = \sin(t)\, e(v) + f(t)k$. Построим ее (рис. 1).

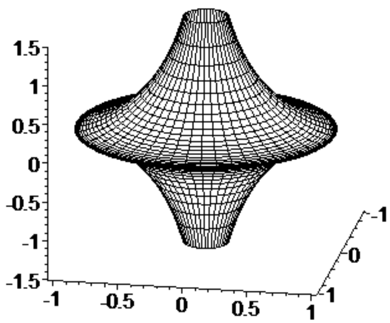

Рис. 1. Псевдосфера

В силу (4), (7) имеем

$$V = \frac{\sin(t)\,((c_1+v)^2 sin^2(t)-1)}{(c_1+v)^2 sin^2(t)+1}\left(e(v)+\frac{\cos(t)}{\sin(t)}k\right)+$$
$$+\frac{2(c_1+v)}{(c_1+v)^2 sin^2(t)+1}\sin(t)\,e'(v).$$

Построим поверхности $R = r - V, V = V^s r_s$ при $c_1 = 30$ (рис. 2), $c_1 = 0$ (рис. 3).

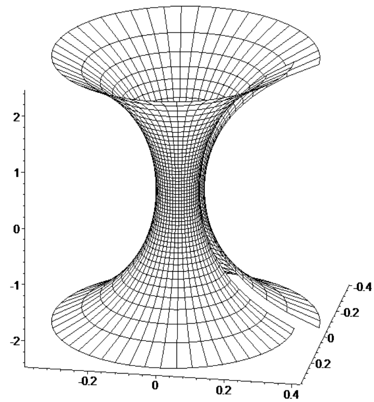

Рис. 2. Преобразование Бианки псевдосферы при $c_1 = 30$

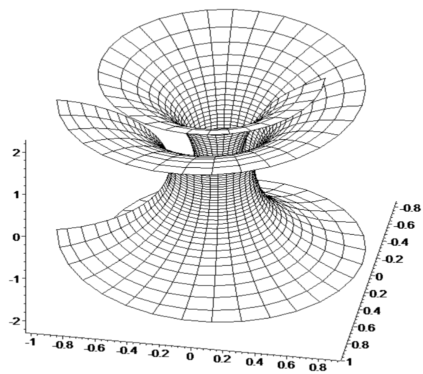

Рис. 3. Преобразование Бианки псевдосферы при $c_1 = 0$

Уравнения поверхности при $c_1 = 0$ примут вид

$$x = \frac{2\sin(t)}{v^2 sin^2(t) + 1}\left(\cos(v) + vsin(v)\right),$$

$$y = \frac{2\sin(t)}{v^2 sin^2(t) + 1}\left(\cos(v) - vsin(v)\right),$$

$$z = \frac{2\sin(t)}{v^2 sin^2(t) + 1} + \lg(tg\left(\frac{t}{2}\right)).$$

Полученная поверхность — это поверхность Куэна [3, с. 342].

Список литературы

1. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 2. М. ; Л., 1948.

2. *Норден А. П.* Об основаниях геометрии. М., 1956.

3. *Кривошапко С. Н., Иванов В. Н., Халаби С. М.* Аналитические поверхности. М., 2006.

Для цитирования: *Чешкова М. А.* Преобразование Бианки псевдосферы // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 71—77. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-7.

MSC 2010: 53A05

M. A. Cheshkova
Altai State University
61, Prosp. Lenina, Barnaul, 656049, Russia
cma41@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-7

Bianchi transformation of the pseudosphere

Submitted on March 6, 2023

The work is devoted to the study of the Bianchi transform for surfaces of constant negative Gaussian curvature. The surfaces of rotation of constant negative Gaussian curvature are the Minding top, the Minding coil, the pseudosphere (Beltrami surface). Surfaces of constant negative Gaussian curvature also include Kuens surface and the Dinis surface. The study of surfaces of constant negative Gaussian curvature (pseudospherical surfaces) is of great importance for the interpretation of Lobachevsky planimetry. The connection of the geometric characteristics of pseudospherical surfaces with the theory of networks, with the theory of solitons, with nonlinear differential equations and sin-Gordon equations is established. The sin-Gordon equation plays an important role in modern physics. Bianchi transformations make it possible to obtain new pseudospherical surfaces from a given pseudospherical surface. The Bianchi transform for the pseudosphere is constructed. Using a mathematical package, the pseudosphere and its Bianchi transform are constructed.

Keywords: Gaussian curvature, surface of revolution, pseudosphere, Kouen's surface, Bianchi transform

References

1. *Kagan, V. F.:* Fundamentals of the theory of surfaces in the tensor exposition, 2. Moscow, Leningrad (1948).
2. *Norden, A. P.:* On the foundations of geometry. Moscow (1956).
3. *Krivoshapko, S. N., Ivanov, V. N., Chalabi, S. M.:* Analytical surfaces. Moscow (2006).

For citation: Cheshkova, M. A. Bianchi transformation of the pseudosphere. DGMF, 54 (2), 71—77. (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-7.