УДК 514.75

ОСНАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, РАССМАТРИВАЕМОЙ С ТРЕХ ТОЧЕК ЗРЕНИЯ

Ю.И.Шевченко

(Калининградский государственный университет)

В многомерном проективном пространстве плоскостная поверхность представлена в виде: I) многообразия плоских образующих; 2) семейства пар образующей и ее I- й дифференциальной окрестности; 3) вырожденного многообразия троек, образованных точкой, проходящими через нее образующей и касательной плоскостями. Выяснена структура соответствующих оснащений, позволяющих задавать фундаментально-групповые связности.

§ I. Плоскостная поверхность как многообразие плоских образующих

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$, деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA=\theta A+\omega^I A_I, \quad dA_I=\theta A_I+\omega^J_I A_J+\omega_I A, \qquad (\mathrm{I})$$

где линейная форма θ играет роль множителя пропорциональности, а инвариантные формы ω^I, ω^J_I, ω_I $(I,J,K=\overline{1,n})$ действующей в пространстве P_n проективной группы $GP(n)$ удовлетворяют структурным уравнениям (см., например, [1, с.173]):

$$\begin{cases} d\omega^I=\omega^J\wedge\omega^I_J, \quad d\omega_I=\omega^J_I\wedge\omega_J, \\ d\omega^I_J=\omega^K_J\wedge\omega^I_K+\delta^I_J\,\omega_K\wedge\omega^K+\omega_J\wedge\omega^I. \end{cases} \qquad (2)$$

В пространстве P_n рассмотрим k-мерную плоскость L_k и произведем разбиение значений индексов:

$$I=(a,\xi); \quad a,b,c=\overline{1,k}; \quad \xi=\overline{k+1,n}.$$

Поместим в плоскость L_k вершины A, A_a подвижного репера. Формулы (I) дают

$$dA=\theta A+\omega^a A_a+\omega^\xi A_\xi, \quad dA_a=\theta A_a+\omega^b_a A_b+\omega^\xi_a A_\xi+\omega_a A. \qquad (3)$$

Откуда получаются уравнения стационарности плоскости L_k:

$$\omega^\xi=0, \quad \omega^\xi_a=0.$$

Пусть плоскость L_k описывает r-мерное семейство B_r,

причем $m=k+r<n$. Многообразие B_r называется линейчатой [2, с.49] или плоскостной [3] поверхностью. Осуществим разбиение:

$$\xi=(i,\alpha); \quad i,j,k=\overline{k+1,m}; \quad \alpha,\beta=\overline{m+1,n}$$

и запишем дифференциальные уравнения плоскостной поверхности

$$\omega^\alpha=\Lambda^\alpha_i\,\omega^i, \quad \omega^i_a=\Lambda^i_{aj}\,\omega^j, \quad \omega^\alpha_a=\Lambda^\alpha_{ai}\,\omega^i. \qquad (4)$$

Формулы (3) на поверхности B_r принимают вид:

$$dA=\theta A+\omega^a A_a+\omega^i B_i, \quad dA_a=\theta A_a+\omega^b_a A_b+\omega_a A+\omega^i B_{ai},$$

где

$$B_i=A_i+\Lambda^\alpha_i A_\alpha, \quad B_{ai}=\Lambda^j_{ai}A_j+\Lambda^\alpha_{ai}A_\alpha.$$

Откуда видно, что I- я дифференциальная окрестность $T_m(A)\supset L_k$ произвольной точки $A\in L_k$ определяется точками A, A_a, B_i. Первая дифференциальная окрестность всей образующей L_k задается точками A, A_a, B_i, B_{ai}, число которых равно $1+m+kr$. Значит, если $m+kr<n$, то в общем случае образующая L_k имеет I-ю дифференциальную окрестность

$$T_{m+kr}: L_k\subset T_{m+kr}\subset P_n,$$

которую называют касательным пространством (см., например, [2, с.50]).

Найдем внешние дифференциалы базисных форм

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\theta^i_j \qquad (\theta^i_j=\omega^i_j-\Lambda^i_{aj}\,\omega^a+\Lambda^\alpha_j\,\omega^i_\alpha). \qquad (5)$$

Продолжая теперь уравнения (4), получим сравнения на компоненты фундаментального объекта $\Lambda_1=\{\Lambda^\alpha_i, \Lambda^i_{aj}, \Lambda^\alpha_{ai}\}$:

$$\begin{cases} \nabla\Lambda^\alpha_{(i)}-\Lambda^\alpha_{ai}\,\omega^a+\omega^\alpha_i\equiv 0, \quad \nabla\Lambda^i_{a(j)}+\Lambda^\alpha_{aj}\,\omega^i_\alpha-\delta^i_j\,\omega_a\equiv 0, \\ \nabla\Lambda^\alpha_{a(i)}+\Lambda^j_{ai}\,\omega^\alpha_j-\Lambda^\alpha_i\,\omega_a\equiv 0 \pmod{\omega^i}, \end{cases} \qquad (6)$$

причем дифференциальный оператор ∇ действует особым образом на объект, если его индекс заключен в круглые скобки, например,

$$\nabla\Lambda^i_{a(j)}=d\Lambda^i_{aj}-\Lambda^i_{ak}\,\theta^k_j-\Lambda^i_{bj}\,\omega^b_a+\Lambda^k_{aj}\,\omega^i_k.$$

С поверхностью B_r ассоциируем расслоение проективных реперов $P(B_r)$, базой которого является сама поверхность, а типовым слоем- проективная группа $P=GP(k)\subset GP(n)$, действующая на образующей L_k. Структурные уравнения главного расслоения $P(B_r)$ состоят из уравнений (5) и следующих:

$$d\omega^a=\omega^b\wedge\omega^a_b+\omega^i\wedge\theta^a_i, \quad d\omega_a=\omega^b_a\wedge\omega_b+\omega^i\wedge\omega_{ai},$$

поверхности X_m имеют вид:

$$\omega^\alpha=0, \quad \omega^\alpha_u=\Lambda^\alpha_{uv}\,\omega^v \tag{17}$$

Замыкая уравнения $\omega^\alpha=0$, получим $\Lambda^\alpha_{[uv]}=0$. Продолжая остальные уравнения (17), найдем

$$\nabla\Lambda^\alpha_{uv}=d\Lambda^\alpha_{uv}-\Lambda^\alpha_{uw}\,\omega^w_v-\Lambda^\alpha_{wv}\,\omega^w_u+\Lambda^\beta_{uv}\,\omega^\alpha_\beta\equiv 0 \pmod{\omega^u}. \tag{18}$$

Пусть поверхность X_m является плоскостной поверхностью X_{k+r}, т.е. через каждую точку $A\in X_m$ проходит плоская образующая $L_k\subset T_m$. Разобьем значения индекса $u=(a,i)$ и расположим вершины A_a на образующей L_k. С учетом уравнений $\omega^\alpha=0$ формулы (16) дают

$$dA=\theta A+\omega^a A_a+\omega^i A_i, \tag{19}$$

$$dA_a=\theta A_a+\omega^b_a A_b+\omega^i_a A_i+\omega^\alpha_a A_\alpha+\omega_a A. \tag{20}$$

Из формулы (20) следует, что к уравнениям (17) нужно добавить следующие:

$$\omega^i_a=\Lambda^i_{ab}\,\omega^b+\Lambda^i_{aj}\,\omega^j. \tag{21}$$

Продолжая их, получим

$$\nabla\Lambda^i_{ab}+\Lambda^\alpha_{ab}\,\omega^i_\alpha\equiv 0, \quad \nabla\Lambda^i_{aj}-\Lambda^i_{ab}\,\omega^b_j+\Lambda^\alpha_{aj}\,\omega^i_\alpha-\delta^i_j\,\omega_a\equiv 0. \tag{22}$$

Используя уравнения (21), преобразуем сравнения (18):

$$\nabla\Lambda^\alpha_{ab}\equiv 0, \quad \nabla\Lambda^\alpha_{ai}-\Lambda^\alpha_{ab}\,\omega^b_i\equiv 0, \tag{23}$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_{ij}-\Lambda^\alpha_{ia}\,\omega^a_j-\Lambda^\alpha_{aj}\,\omega^a_i\equiv 0. \tag{24}$$

При $\omega^i=0$ из формулы (19) имеем $\bar dA=\bar\theta A+\bar\omega^a A_a$, где черта обозначает упрощения, вызванные исходными уравнениями. Тогда точка A смещается вдоль образующей L_k. Формулы (20) показывают, что образующая L_k будет относительно инвариантной лишь в случае $\bar\omega^i_a=0$, $\bar\omega^\alpha_a=0$, т.е. при $\Lambda^i_{ab}=0$, $\Lambda^\alpha_{ab}=0$. Эти равенства имеют инвариантный смысл, т.к. подобъект $\{\Lambda^\alpha_{ab},\Lambda^i_{ab}\}$ – тензор, что видно из сравнений (22), (23). Теперь

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\vartheta^i_j \qquad (\vartheta^i_j=\omega^i_j-\Lambda^i_{aj}\,\omega^a), \tag{25}$$

т.е. система уравнений $\omega^i=0$ вполне интегрируема.

Таким образом, дифференциальные уравнения плоскостной поверхности X_{k+r} имеют вид

$$\omega^\alpha=0, \quad \omega^i_a=\Lambda^i_{aj}\,\omega^j, \quad \omega^\alpha_a=\Lambda^\alpha_{ai}\,\omega^i, \quad \omega^\alpha_i=\Lambda^\alpha_{ij}\,\omega^j+\Lambda^\alpha_{ia}\,\omega^a. \tag{26}$$

Компоненты фундаментального объекта $\Lambda_3=\{\Lambda^i_{aj},\Lambda^\alpha_{ai}=\Lambda^\alpha_{ia},\Lambda^\alpha_{ij}=\Lambda^\alpha_{ji}\}$ удовлетворяют сравнениям (24) и следующим:

$$\nabla\Lambda^\alpha_{ai}\equiv 0, \quad \nabla\Lambda^i_{aj}+\Lambda^\alpha_{aj}\,\omega^i_\alpha-\delta^i_j\,\omega_a\equiv 0. \tag{27}$$

Здесь плоскостная поверхность X_{k+r} рассматривается как вырожденное [10, с.194] многообразие троек (A, L_k, T_m), причем точка A и касательная плоскость T_m описывают m-мерные семейства, а образующая L_k – r-мерное семейство.

К поверхности X_{k+r} присоединим главное расслоение $H(X_{k+r})$, базой которого является сама поверхность, а типовым слоем – группа $H\subset GP(n)$, действующая на тройке (A, L_k, T_m). Структурные уравнения расслоения $H(X_{k+r})$ состоят из уравнений (25) и следующих:

$$d\omega^a=\omega^b\wedge\omega^a_b+\omega^i\wedge\omega^a_i,$$

$$\begin{aligned}
d\omega^a_b&=\omega^c_b\wedge\omega^a_c+\omega^c\wedge\omega^a_{bc}+\omega^i\wedge\omega^a_{bi},\\
d\omega_a&=\omega^b_a\wedge\omega_b+\omega^i\wedge\omega_{ai},\\
d\omega^i_j&=\omega^k_j\wedge\omega^i_k+\omega^a\wedge\omega^i_{ja}+\omega^k\wedge\omega^i_{jk},\\
d\omega^a_i&=\omega^b_i\wedge\omega^a_b+\omega^j_i\wedge\omega^a_j+\omega^b\wedge\omega^a_{ib}+\omega^j\wedge\omega^a_{ij},\\
d\omega_i&=\omega^a_i\wedge\omega_a+\omega^j_i\wedge\omega_j+\omega^a\wedge\omega_{ia}+\omega^j\wedge\omega_{ij},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{cases}
\omega^a_{bc}=-\delta^a_b\,\omega_c-\delta^a_c\,\omega_b, \quad \omega^a_{bi}=\Lambda^j_{bi}\,\omega^a_j+\Lambda^\alpha_{bi}\,\omega^a_\alpha-\delta^a_b\,\omega_i,\\
\omega_{ai}=\Lambda^j_{ai}\,\omega_j+\Lambda^\alpha_{ai}\,\omega_\alpha, \quad \omega^i_{ja}=\Lambda^\alpha_{ja}\,\omega^i_\alpha-\delta^i_j\,\omega_a,\\
\omega^i_{jk}=\Lambda^\alpha_{jk}\,\omega^i_\alpha-\Lambda^i_{ak}\,\omega^a_j-\delta^i_j\,\omega_k-\delta^i_k\,\omega_j, \quad \omega^a_{ij}=\Lambda^\alpha_{ij}\,\omega^a_\alpha,\\
\omega^a_{ib}=\Lambda^\alpha_{ib}\,\omega^a_\alpha-\delta^a_b\,\omega_i, \quad \omega_{ia}=\Lambda^\alpha_{ia}\,\omega_\alpha, \quad \omega_{ij}=\Lambda^\alpha_{ij}\,\omega_\alpha.
\end{cases} \tag{28}$$

Фундаментально-групповая связность в главном расслоении $H(X_{k+r})$ задается с помощью объекта

$$\Gamma_3=\{\Gamma^a_{bc},\Gamma^a_{bi},\Gamma_{ab},\Gamma_{ai},\Gamma^i_{ja},\Gamma^i_{jk},\Gamma^a_{ib},\Gamma^a_{ij},\Gamma_{ia},\Gamma_{ij}\},$$

компоненты которого удовлетворяют сравнениям

$$\begin{cases}
\nabla\Gamma^a_{bc}+\omega^a_{bc}\equiv 0, \quad \nabla\Gamma^a_{bi}-\Gamma^a_{bc}\,\omega^c_i+\omega^a_{bi}\equiv 0,\\
\nabla\Gamma_{ab}+\Gamma^c_{ab}\,\omega_c\equiv 0, \quad \nabla\Gamma_{ai}+\Gamma^b_{ai}\,\omega_b-\Gamma_{ab}\,\omega^b_i+\omega_{ai}\equiv 0,\\
\nabla\Gamma^i_{ja}+\omega^i_{ja}\equiv 0, \quad \nabla\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{ja}\,\omega^a_k+\omega^i_{jk}\equiv 0,\\
\nabla\Gamma^a_{ib}-\Gamma^a_{cb}\,\omega^c_i+\Gamma^j_{ib}\,\omega^a_j+\omega^a_{ib}\equiv 0,\\
\nabla\Gamma^a_{ij}-\Gamma^a_{ib}\,\omega^b_j-\Gamma^a_{bj}\,\omega^b_i+\Gamma^k_{ij}\,\omega^a_k+\omega^a_{ij}\equiv 0,\\
\nabla\Gamma_{ia}+\Gamma^b_{ia}\,\omega_b+\Gamma^j_{ia}\,\omega_j-\Gamma_{ba}\,\omega^b_i+\omega_{ia}\equiv 0,\\
\nabla\Gamma_{ij}+\Gamma^a_{ij}\,\omega_a+\Gamma^k_{ij}\,\omega_k-\Gamma_{aj}\,\omega^a_i-\Gamma_{ia}\,\omega^a_j+\omega_{ij}\equiv 0
\end{cases} \tag{29}$$

$$d\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \delta_b^a \omega_c \wedge \omega^c + \omega_b \wedge \omega^a + \theta^i \wedge \omega_{bi}^a,$$

$$d\omega_q^p = \omega_q^t \wedge \omega_t^p + \delta_q^p \omega_a \wedge \omega^a + \theta^i \wedge \omega_{qi}^p,$$

$$d\omega_p^a = \omega_p^b \wedge \omega_b^a + \omega_p^q \wedge \omega_q^a + \omega_p \wedge \omega^a + \theta^i \wedge \omega_{pi}^a,$$

$$d\omega_p = \omega_p^a \wedge \omega_a + \omega_p^q \wedge \omega_q + \theta^i \wedge \omega_{pi},$$

где

$$\begin{cases} \theta_i^a = \Lambda_i^p \omega_p^a, \quad \omega_{bi}^a = \Lambda_{bi}^p \omega_p^a - \delta_b^a \Lambda_i^p \omega_p, \\ \omega_{ai} = \Lambda_{ai}^p \omega_p, \quad \omega_{pi}^a = \Lambda_{pi}^\sigma \omega_\sigma^a, \quad \omega_{pi} = \Lambda_{pi}^\sigma \omega_\sigma, \\ \omega_{qi}^p = \Lambda_{qi}^\sigma \omega_\sigma^p - \Lambda_{ai}^p \omega_q^a - \delta_q^p \Lambda_i^t \omega_t - \Lambda_i^p \omega_q. \end{cases} \tag{12}$$

Согласно способу Лаптева фундаментально-групповая связность в главном расслоении $G(M_r)$ задается с помощью объекта связности

$$\Gamma_2 = \{ \Gamma_i^a, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}, \Gamma_{qi}^p, \Gamma_{pi}^a, \Gamma_{pi} \},$$

компоненты которого удовлетворяют сравнениям (7) с учетом новых выражений форм $\theta_i^a, \omega_{bi}^a, \omega_{ai}$ и следующим:

$$\begin{cases} \nabla \Gamma_{qi}^p + \delta_q^p (\Gamma_{ai} \omega^a - \Gamma_i^a \omega_a) + \omega_{qi}^p \equiv 0, \\ \nabla \Gamma_{pi}^a - \Gamma_{bi}^a \omega_p^b + \Gamma_{pi}^q \omega_q^a + \Gamma_{pi} \omega^a - \Gamma_i^a \omega_p + \omega_{pi}^a \equiv 0, \\ \nabla \Gamma_{pi} + \Gamma_{pi}^a \omega_a + \Gamma_{pi}^q \omega_q - \Gamma_{ai} \omega_p^a + \omega_{pi} \equiv 0. \end{cases} \tag{13}$$

Произведем композиционное оснащение [8], [9] поверхности M_r, присоединяя к каждой паре (L_h, T_{m+hr}) две плоскости:

а) обобщенную нормаль 2-го рода

$$P_{r(h+1)-1} : \ L_h + P_{r(h+1)-1} = T_{m+hr},$$

б) обобщенную плоскость Картана

$$P_{n-m-hr-1} : \ T_{m+hr} + P_{n-m-hr-1} = P_n.$$

Оснащающие плоскости $P_{r(h+1)-1}, P_{n-m-hr-1}$ определим совокупностями точек

$$A_p + \lambda_p^a A_a + \lambda_p A, \qquad A_\sigma + \lambda_\sigma^a A_a + \lambda_\sigma^p A_p + \lambda_\sigma A,$$

причем

$$\begin{cases} \nabla \lambda_p^a + \lambda_p \omega^a + \omega_p^a \equiv 0, \quad \nabla \lambda_p + \lambda_p^a \omega_a + \omega_p \equiv 0; \\ \nabla \lambda_\sigma^a + \lambda_\sigma^p \omega_p^a + \lambda_\sigma \omega^a + \omega_\sigma^a \equiv 0, \quad \nabla \lambda_\sigma^p + \omega_\sigma^p \equiv 0, \\ \nabla \lambda_\sigma + \lambda_\sigma^a \omega_a + \lambda_\sigma^p \omega_p + \omega_\sigma \equiv 0. \end{cases} \tag{14}$$

Т е о р е м а 2. Композиционное оснащение плоскостной

поверхности, представляемой как r-мерное многообразие M_r пар плоской образующей L_h и ее I-й дифференциальной окрестности T_{m+hr}, позволяет задать связность в расслоении $G(M_r)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фундаментальный тензор $\Lambda_2 = \{\Lambda_i^p, \Lambda_{ai}^p, \Lambda_{pi}^\sigma\}$ и оснащающий квазитензор $\lambda_2 = \{\lambda_p^a, \lambda_p; \lambda_\sigma^a, \lambda_\sigma^p, \lambda_\sigma\}$ охватывают компоненты объекта связности Γ_2 по формулам:

$$\Gamma_i^a = \Lambda_i^p \lambda_p^a, \quad \Gamma_{bi}^a = \Lambda_{bi}^p \lambda_p^a - \delta_b^a \Lambda_i^p \lambda_p, \quad \Gamma_{ai} = \Lambda_{ai}^p \lambda_p, \tag{15}$$

$$\Gamma_{qi}^p = \Lambda_{qi}^\sigma \lambda_\sigma^p - \Lambda_{ai}^p \lambda_q^a - \delta_q^p \Lambda_i^t \lambda_t - \Lambda_i^p \lambda_q,$$

$$\Gamma_{pi}^a = \Lambda_{pi}^\sigma \lambda_\sigma^a - M_{pi}^q \lambda_q^a, \quad \Gamma_{pi} = \Lambda_{pi}^\sigma \lambda_\sigma - M_{pi}^q \lambda_q,$$

где

$$M_{pi}^q = \lambda_p^a \Lambda_{ai}^q + \lambda_p \Lambda_i^q.$$

Эти формулы проверяются с помощью соотношений (7), (II) - (I4)

З а м е ч а н и я: 4) для построения компонент объекта проективной связности по формулам (I5) достаточно поля обобщенной нормали 2-го рода; 5) обобщенное оснащение Картана семейства M_r недостаточно (ср. [2, с.96, IC8]) для задания связности в расслоении $G(M_r)$; 6) композиционное оснащение поверхности M_r порождает оснащение Бортолотти семейства ее образующих L_h полем плоскостей

$$P_{n-h-1} = P_{r(h+1)-1} + P_{n-m-hr-1};$$

7) в общем случае композиционное оснащение семейства M_r не удается ослабить до оснащения Нордена-Гринцевичуса [2, с.86, 108].

§ 3. Плоскостная поверхность как вырожденное многообразие точек, образующих и касательных плоскостей

Рассмотрим m-поверхность X_m общего вида как многообразие касательных плоскостей, точнее, как m-мерное невырожденное [10, с.194] многообразие пар (X, T_m), причем точка X и ее I-я дифференциальная окрестность принадлежат m-плоскости T_m [7]. Вершины A, A_u $(u,v,w=\overline{1,m})$ подвижного репера $\{A, A_u, A_\alpha\}$ поместим на касательную плоскость T_m, при этом вершину A – в точку X. Запишем подробнее часть формул (I):

$$dA = \theta A + \omega^u A_u + \omega^\alpha A_\alpha, \quad dA_u = \theta A_u + \omega_u^v A_v + \omega_u^\alpha A_\alpha + \omega_u A, \tag{16}$$

откуда видно, что формы $\omega^u, \omega^\alpha, \omega_u^\alpha$ – главные, причем формы ω^α обращаются в нуль. Значит, дифференциальные уравнения

$$d\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \delta^a_b \omega_c \wedge \omega^c + \omega_b \wedge \omega^a + \omega^i \wedge \omega^a_{bi},$$

где
$$\theta^a_i = \omega^a_i + \Lambda^\alpha_i \omega^a_\alpha, \quad \omega_{ai} = \Lambda^\xi_{ai}\omega_\xi, \quad \omega^a_{bi} = \Lambda^\xi_{bi}\omega^a_\xi - \delta^a_b(\omega_i + \Lambda^\alpha_i \omega_\alpha).$$

Зададим проективную связность в расслоении $P(B_r)$ способом Лаптева [4, с.63, 83], [5, с.I4] с помощью объекта $\Gamma_1 = \{\Gamma^a_i, \Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai}\}$:

$$\begin{cases} \nabla\Gamma^a_{(i)} - \Gamma^a_{bi}\omega^b + \theta^a_i \equiv 0, \quad \nabla\Gamma_{a(i)} + \Gamma^b_{ai}\omega_b + \omega_{ai} \equiv 0, \\ \nabla\Gamma^a_{b(i)} + \delta^a_b(\Gamma_{ci}\omega^c - \Gamma^c_i\omega_c) + \Gamma_{bi}\omega^a - \Gamma^a_i\omega_b + \omega^a_{bi} \equiv 0. \end{cases} \tag{7}$$

Произведем оснащение Бортолотти поверхности B_r , называемое также сильным проективным оснащением [5]. К каждой образующей L_k присоединим $(n-k-1)$-мерную плоскость P_{n-k-1} : $L_k + P_{n-k-1} = P_n$, где под суммой плоскостей понимается их линейная оболочка. Оснащающую плоскость P_{n-k-1} определим совокупностью точек $A_\xi + \lambda^a_\xi A_a + \lambda_\xi A$. Требуя их относительную инвариантность, найдем

$$\nabla\lambda^a_\xi + \lambda_\xi\omega^a + \omega^a_\xi \equiv 0, \quad \nabla\lambda_\xi + \lambda^a_\xi\omega_a + \omega_\xi \equiv 0. \tag{8}$$

Значит, оснащение Бортолотти задается полем квазитензора $\lambda_1 = \{\lambda^a_\xi, \lambda_\xi\}$.

Т е о р е м а I. Оснащение Бортолотти плоскостной поверхности, рассматриваемой как многообразие B_r плоских образующих L_k , индуцирует проективную связность в расслоении $P(B_r)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фундаментальный объект Λ_1 поверхности B_r и оснащающий квазитензор λ_1 охватывают объект проективной связности Γ_1 по формулам:

$$\Gamma^a_i = \lambda^a_i + \Lambda^\alpha_i\lambda^a_\alpha, \quad \Gamma^a_{bi} = \Lambda^\xi_{bi}\lambda^a_\xi - \delta^a_b(\lambda_i + \Lambda^\alpha_i\lambda_\alpha), \quad \Gamma_{ai} = \Lambda^\xi_{ai}\lambda_\xi,$$

проверяемым с помощью соотношений (6) - (8).

З а м е ч а н и я: I) эта теорема доказана Ю.Г.Лумисте [5, с.2I] и является частным случаем результата [6], полученного для более широкого расслоения, ассоциированного с произвольным многообразием плоскостей; 2) Ю.Г.Лумисте ввел различные оснащения плоскостной поверхности и конгруэнции плоскостей при одновременном их исследовании [5]; 3) поверхность общего вида, рассматриваемая в виде точечного многообразия (см., например, [7]), можно представлять как особый случай плоскостной поверхности, когда $k=0$.

§ 2. Плоскостная поверхность как семейство пар образующей и ее I- й дифференциальной окрестности

Пусть $m+kr<n$. Разобьем значения индекса ξ другим способом:

$$\xi = (p, \sigma); \quad p, q, t = \overline{k+1, m+kr}; \quad \sigma, \tau = \overline{m+kr+1, n}.$$

Осуществим дополнительную канонизацию репера, помещая вершины A_p в касательное пространство T_{m+kr} . Тогда плоскостная поверхность представляется как r-мерное многообразие M_r пар плоскостей (L_k, T_{m+kr}). Из формул (I) имеем

$$dA = \theta A + \omega^a A_a + \omega^p A_p + \omega^\sigma A_\sigma,$$

$$dA_a = \theta A_a + \omega^b_a A_b + \omega^p_a A_p + \omega^\sigma_a A_\sigma + \omega_a A,$$

$$dA_p = \theta A_p + \omega^a_p A_a + \omega^q_p A_q + \omega^\sigma_p A_\sigma + \omega_p A.$$

Откуда видно, что к прежним главным формам ω^ξ, ω^ξ_a добавляются формы ω^σ_p , более того, формы $\omega^\sigma, \omega^\sigma_a$ обращаются в нуль.

Запишем дифференциальные уравнения плоскостной поверхности M_r в параметрическом виде:

$$\omega^\sigma = 0, \quad \omega^\sigma_a = 0; \quad \omega^p = \Lambda^p_i\theta^i, \quad \omega^p_a = \Lambda^p_{ai}\theta^i, \quad \omega^\sigma_p = \Lambda^\sigma_{pi}\theta^i, \tag{9}$$

причем параметрические формы θ^i удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j. \tag{I0}$$

Замыкая первые уравнения системы (9), получим

$$\Lambda^p_{[i}\Lambda^\sigma_{|p|j]} = 0, \quad \Lambda^p_{a[i}\Lambda^\sigma_{|p|j]} = 0;$$

продолжая остальные уравнения, найдем

$$\nabla\Lambda^p_i - \Lambda^p_{ai}\omega^a \equiv 0, \quad \nabla\Lambda^p_{ai} - \Lambda^p_i\omega_a \equiv 0, \quad \nabla\Lambda^\sigma_{pi} \equiv 0. \tag{II}$$

Здесь квадратные скобки обозначают альтернирование, символ $\equiv$ означает сравнение по модулю форм θ^i , дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla\Lambda^\sigma_{pi} = d\Lambda^\sigma_{pi} - \Lambda^\sigma_{pj}\theta^j_i - \Lambda^\sigma_{qi}\omega^q_p + \Lambda^\tau_{pi}\omega^\sigma_\tau.$$

С поверхностью M_r свяжем главное расслоение $G(M_r)$, базой которого является сама поверхность, а типовым слоем - группа $G : P \subset G \subset GP(n)$, действующая на паре плоскостей (L_k, T_{m+kr}). Структурные уравнения расслоения $G(M_r)$ состоят из уравнений (I0) и следующих:

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega^a_b + \theta^i \wedge \theta^a_i, \quad d\omega_a = \omega^b_a \wedge \omega_b + \theta^i \wedge \omega_{ai},$$

Осуществим композиционное оснащение [9] поверхности X_{k+r}, состоящее в задании на ней полей трех плоскостей $P_{k-1} : A + P_{k-1} = L_k$, $P_{m-k-1} : L_k + P_{m-k-1} = T_m$, $P_{n-m-1} : T_m + P_{n-m-1} = P_n$. Оснащающие плоскости определим совокупностями точек

$$C_a = A_a + \lambda_a A, \quad C_i = A_i + \lambda_i^a A_a + \lambda_i A,$$

$$C_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha^i A_i + \lambda_\alpha A.$$

Дифференциалы точек C_a, C_i, C_α имеют вид:

$$dC_a \equiv \theta C_a + \omega_a^b C_b + (\nabla\lambda_a + \omega_a) A,$$

$$dC_i \equiv \theta C_i + \omega_i^j C_j + (\nabla\lambda_i^a + \omega_i^a) A_a + (\nabla\lambda_i + \lambda_i^a \omega_a + \omega_i) A,$$

$$dC_\alpha \equiv \theta C_\alpha + \omega_\alpha^\beta C_\beta + (\nabla\lambda_\alpha^a + \lambda_\alpha^i \omega_i^a + \omega_\alpha^a) A_a +$$

$$+ (\nabla\lambda_\alpha^i + \omega_\alpha^i) A_i + (\nabla\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^a \omega_a + \lambda_\alpha^i \omega_i + \omega_\alpha) A,$$

поэтому коэффициенты разложений должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} \nabla\lambda_a + \omega_a = \lambda_{au}\omega^u; \quad \nabla\lambda_i^a + \omega_i^a = \lambda_{iu}^a \omega^u, \\ \nabla\lambda_i + \lambda_i^a \omega_a + \omega_i = \lambda_{iu}\omega^u; \quad \nabla\lambda_\alpha^i + \omega_\alpha^i = \lambda_{\alpha u}^i \omega^u, \\ \nabla\lambda_\alpha^a + \lambda_\alpha^i \omega_i^a + \omega_\alpha^a = \lambda_{\alpha u}^a \omega^u, \quad \nabla\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^a \omega_a + \lambda_\alpha^i \omega_i + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha u}\omega^u. \end{cases} \tag{30}$$

Отметим, что квазитензоры $\{\lambda_i^a, \lambda_i\}$, $\{\lambda_\alpha^i, \lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha\}$, задающие плоскости P_{m-k-1}, P_{n-m-1}, содержат подобъекты: а) λ_i^a, определяющий плоскость $[A, C_i] = P_{m-k}$; б) λ_α^i, определяющий плоскость $[A, A_a, C_\alpha] = P_{n-m+k}$; в) $\{\lambda_\alpha^i, \lambda_\alpha^a\}$, определяющий плоскость $[A, C_\alpha] = P_{n-m}$ – нормаль 1-го рода в смысле А.П.Нордена [11, с.197].

Т е о р е м а 3. Композиционное оснащение плоскостной поверхности X_{k+r}, рассматриваемой как вырожденное многообразие троек (A, L_k, T_m), индуцирует связность в расслоении $H(X_{k+r})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фундаментальный объект Λ_3 поверхности X_{k+r} и оснащающий квазитензор

$$\lambda_3 = \{\lambda_a;\ \lambda_i^a, \lambda_i;\ \lambda_\alpha^i, \lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha\}$$

дают возможность охватить компоненты объекта связности Γ_3 по формулам

$$\Gamma_{bc}^a = -\delta_b^a \lambda_c - \delta_c^a \lambda_b, \quad \Gamma_{bi}^a = \Lambda_{bi}^j \lambda_j^a + \lambda_b \lambda_i^a + \Lambda_{bi}^\alpha \mu_\alpha^a - \delta_b^a \mu_i,$$

$$\Gamma_{ab} = -\lambda_a \lambda_b, \quad \Gamma_{ai} = \Lambda_{ai}^j \lambda_j + \Lambda_{ai}^\alpha \mu_\alpha + \lambda_a \lambda_b \lambda_i^b,$$

$$\Gamma_{jk}^i = \Lambda_{jk}^\alpha \lambda_\alpha^i - \lambda_j^a \Lambda_{ak}^i - \delta_j^i \mu_k - \delta_k^i \lambda_j + \lambda_\alpha^i \lambda_j^a \Lambda_{ak}^\alpha,$$

$$\Gamma_{ja}^i = \Lambda_{ja}^\alpha \lambda_\alpha^i - \delta_j^i \lambda_a, \quad \Gamma_{ib}^a = \Lambda_{ib}^\alpha \lambda_\alpha^a - \delta_b^a \mu_i,$$

$$\Gamma_{ij}^a = \Lambda_{ij}^\alpha \lambda_\alpha^a - \lambda_k^a \lambda_i^b M_{bj}^k - \lambda_b \lambda_i^b \lambda_j^a, \quad \Gamma_{ia} = \Lambda_{ia}^\alpha \lambda_\alpha - \mu_i \lambda_a,$$

$$\Gamma_{ij} = \Lambda_{ij}^\alpha \lambda_\alpha + \lambda_a \mu_i \lambda_j^a - \lambda_k \lambda_i^a M_{aj}^k - \lambda_i \lambda_j,$$

где

$$\mu_i = \lambda_i - \lambda_i^a \lambda_a, \quad \mu_\alpha^a = \lambda_\alpha^a - \lambda_\alpha^i \lambda_i^a, \quad M_{aj}^k = \Lambda_{aj}^k - \Lambda_{aj}^\alpha \lambda_\alpha^k.$$

Эти формулы проверяются с помощью соотношений (24), (27) – (30).

О п р е д е л е н и е. Нормализацией плоскостной поверхности X_{k+r}, рассматриваемой как вырожденное семейство троек (A, L_k, T_m), назовем задание на ней полей двух плоскостей:

а) плоскости

$$P_{m-k} : L_k + P_{m-k} = T_m, \quad L_k \cap P_{m-k} = A;$$

б) нормали I-го рода А.П.Нордена

$$P_{n-m} : T_m + P_{n-m} = P_n, \quad T_m \cap P_{n-m} = A.$$

Т е о р е м а 4. Нормализация плоскостной поверхности X_{k+r} порождает ее композиционное оснащение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нормализация определяется полем квазитензора $\lambda_3' = \{\lambda_i^a, \lambda_\alpha^i, \lambda_\alpha^a\}$. Частично продолжая его компоненты, найдем

$$\begin{cases} \nabla\lambda_{ib}^a - \lambda_j^a \omega_{ib}^j + \lambda_i^c \omega_{cb}^a + \omega_{ib}^a \equiv 0, \\ \nabla\lambda_{\alpha a}^i + \Lambda_{ja}^\beta (\lambda_\beta^i \omega_\alpha^j + \lambda_\alpha^j \omega_\beta^i) \equiv 0, \\ \nabla\lambda_{\alpha b}^a + \Lambda_{ib}^\beta (\lambda_\beta^a \omega_\alpha^i + \lambda_\alpha^i \omega_\beta^a) - \delta_b^a (\lambda_\alpha^c \omega_c + \lambda_\alpha^i \omega_i + \omega_\alpha) + \lambda_{\alpha b}^i \omega_i^a \equiv 0. \end{cases} \tag{31}$$

Фундаментальный объект Λ_3 поверхности X_{k+r} и частично продолженный нормализующий квазитензор $\{\lambda_3', \lambda_{ib}^a, \lambda_{\alpha a}^i, \lambda_{\alpha b}^a\}$ позволяют охватить компоненты $\lambda_a, \lambda_i, \lambda_\alpha$, дополняющие нормализующий квазитензор λ_3' до оснащающего квазитензора λ_3, по формулам

$$\lambda_a = \frac{1}{r} (\Lambda_{ai}^\alpha \lambda_\alpha^i - \Lambda_{ai}^i), \quad \lambda_i = \frac{1}{k} (\Lambda_{ia}^\alpha \mu_\alpha^a - \lambda_{ia}^a),$$

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{k} (\Lambda_{ia}^\beta \lambda_\alpha^i \mu_\beta^a + \lambda_{\alpha a}^i \lambda_i^a - \lambda_{\alpha a}^a),$$

проверяемым с помощью соотношений (24), (27), (30), (31).

С л е д с т в и е. Нормализация плоскостной поверхности X_{k+r}, во-первых, индуцирует фундаментально-групповую связность в расслоении $H(X_{k+r})$, во-вторых, порождает оснащение Бортолотти семейства образующих L_k полем плоскостей $P_{n-k-1} = P_{m-k-1} + P_{n-m-1}$, в-третьих, определяет нормализацию А.П.Нордена поверхности X_{k+r} полями плоскостей P_{n-m}, $P_{m-1}=P_{k-1}+P_{m-k-1}$.

З а м е ч а н и я: 8) нормализация А.П.Нордена плоскостной поверхности X_{k+r} недостаточна для задания связности в расслоении $H(X_{k+r})$; 9) если тензор $\Lambda^{\alpha}_{ai}=0$, то уравнения (26) совпадают с уравнениями тангенциально вырожденной поверхности [12] , в которые не входят формы ω^a , т.е. образующая L_k перестает быть центрированной.

Библиографический список

I. К о б а я с и Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986. 224 с.

2. Б л и з н и к а с В.И. Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.43-110.

3. Г е й д е л ь м а н Р.М., К р у г л я к о в Л.З. О плоскостных поверхностях // Доклады АН СССР. 1974. Т.219. № I. С.19-22.

4. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а н у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. 248 с.

5. Л у м и с т е Ю.Г. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях // Уч. зап. / Тартуск. ун-т. Тарту, 1965. Вып.177. С.6-41.

6. Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1978. Вып.9. С.124-133.

7. Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащениях многомерной поверхности проективного пространства // Там же, 1977. Вып.8. С.135-150.

8. К р у г л я к о в Л.З., Щ е р б а к о в Н.Р. Некоторые связности, ассоциированные с семейством плоскостей в проективном пространстве // Геометрич. сб. Томск, 1980. № 21. С.14-20.

9. Ш е в ч е н к о Ю.И. Структура оснащения многообразия линейных фигур // Тезисы докл. VI Прибалт. геометр. конф. Таллин, 1984. С.137-138.

10. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве// Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1969. Т.2. С.179-206.

11. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976. 432 с.

12. Ш е в ч е н к о Ю.И. Связности в главных расслоениях, ассоциированных с тангенциально вырожденными поверхностями в проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1976. Вып.7. С.139-146.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С НЕРАСПАДАЮЩЕЙСЯ ФОКАЛЬНОЙ КОНИКОЙ

С.В.Ш м е л е в а

(Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота)

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается конгруэнция Π_0 линейчатых невырожденных квадрик Q с фокальной нераспадающейся коникой C [1], определяемая вполне интегрируемой системой Пфаффа. Основное внимание обращается на изучение поверхностей (A_0) и (A_3), описанных фокальными точками квадрики Q , не инцидентными конике C . Доказано, что асимптотические линии на поверхностях (A_0) и (A_3) соответствуют и огибаются прямолинейными образующими квадрики Q . Прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) вырождается в связку прямых.

Отнесем конгруэнцию Π_0 к реперу $\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, где A_1,A_2 - точки пересечения прямолинейных образующих квадрики $Q\in\Pi_0$, проходящих через фокальные точки A_0 и A_3 . При надлежащей нормировке вершин репера уравнение квадрики Q приводится к виду:

$$\mathcal{F}\equiv x^1x^2-x^0x^3=0. \qquad (1)$$

Произвольная конгруэнция K линейчатых квадрик в репере, построенном на двух фокальных точках A_0 и A_3 квадрики указанным выше способом, определяется следующей системой уравнений Пфаффа [2, с.119] :