где α -некоторая I-форма.

Направление прямой $(x,\bar{x})$, параметры m^i которой удовлетворяют полученным уравнениям (I4), принято называть характеристическими направлениями отображения f в точке x.

Такое определение характеристических направлений отображения восходит к работе [1] Борувки 1926г. Он дал определение характеристических направлений в данной точке при рассмотрении отображения двумерных проективных плоскостей (используя элементы касания различных порядков в этой точке). Затем понятие характеристических направлений было перенесено на случай отображения областей пространств размерности $n\geqslant 3$ проективных, аффинных и евклидовых [3].

Это классическое определение, связанное при $n\geqslant 3$ с совпадением соприкасающихся плоскостей $\Pi_2(y,\bar{\gamma})$ и $\Pi_2(y,\gamma')$, хорошо работает в случае отображения одной плоской области в другую плоскую область (тогда существует линия γ' и соприкасающаяся плоскость $\Pi_2(y,\gamma')$). Если же мы рассматриваем отображение "кривых" пространств, то указанное выше определение характеристических направлений с помощью линии γ' (которой здесь не существует) не годится. Правда, в случае отображения областей, лежащих на гиперповерхностях евклидова n-пространства А.С.Добротворскому [4] удалось ввести на этих гиперповерхностях понятие характеристических направлений отображения, используя при этом классическое его определение. Но это было сделано за счет достаточно сложных вспомогательных построений.

5. Если исходить из алгебраической точки зрения, то определение характеристических направлений, данное нами в п.2 (и пригодное не только для отображения плоских областей, но и для отображения кривых областей), и классическое определение, выражающееся в выполнении равенств (I4), на самом деле совпадают.

Действительно, I-распределение $\Delta_1(\xi)$ можно задать отношением форм $\omega^i=\xi^i\theta$ $(D\theta=\theta\wedge\theta_1)$. Тогда систему (*) п.2, которая определяет характеристическое I-распределение, можно записать в виде:

$$h^i_{jk}\,\omega^j\omega^k=\lambda^*\omega^i\quad(\lambda^*=\lambda\theta). \tag{I5}$$

Теперь рассмотрим классическое определение (I4). Заменив в этом равенстве $\theta^i_j-\omega^i_j$ на $h^i_{jk}\omega^k$ и m^j на m^j/θ, мы получим ту же систему равенств (I5) (где $\lambda^*=\alpha$). Поэтому можно ввести

такое определение [5], обобщающее классическое.

Определение. При изучении отображений $f:(\mathfrak{X}_n,\nabla)\to(\bar{\mathfrak{X}}_n,\bar{\nabla})$ мы будем называть характеристическими такие I-распределения $\Delta_1=\Delta_1(\xi)$, которые удовлетворяют условию (6). Векторное поле ξ, задающее такое I -распределение, удовлетворяет системе уравнений (*).

Библиографический список

I. Bořůvka O. Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs. I, II. Spisy přírodověd. fak. Brně, 1926. V. 27, 72, 85.

2. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

3. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами// Итоги науки, 1963/ ВИНИТИ. М., 1965. С.65-107.

4. Добротворский А.С. Отображение гиперповерхностей евклидовых пространств//Геометрия погруженных многообразий: Сб.тр./МОПИ им.Н.К.Крупской. М., 1972. С.46-58.

5. Базылев В.Т. К геометрии отображений пространств аффинной связности/Восьмая Всесоюзная научная конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии: Тезисы докл. Одесса, 1984. С.10.

УДК 514.75.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ Δ_n НА МНОГООБРАЗИИ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТРАНСТВА P_n

Г.П.Бочилло
(Томский ун-т)

В работе рассматриваются распределения Δ_n на многообразии M_{2n-1} всех гиперплоских элементов пространства P_n. В смысле [1] Δ_n являются распределениями касательных элементов, порожденных n-мерными подмногообразиями гиперплоских элементов $x=\{A,\alpha\}$ пространства P_n. Здесь A -точка, α -инцидентная ей гиперплоскость пространства P_n. Регулярное (по аналогии с [2]) распределение Δ_n на M_{2n-1} порождает поле невырожденного тензора второй валентности $\hat{\Gamma}$ -главного фундаментального тензора распределения (г.ф.т.р), который несимметричен в общем случае. Геометрия г.ф.т.р. на M_{2n-1} рассмотрена в [3]. В данной работе изучается класс распределений Δ_n на M_{2n-1}, у которых г.ф.т.р. симметричен.

В работе индексы принимают следующие значения: $i,j,\dots=\overline{1,n}$; $p,q,\dots=\overline{1,n-1}$; $J,K,\dots=\overline{0,n}$; а дифференциальный оператор ∇ обозначает известную операцию [4].

I. Главный фундаментальный тензор распределения.

Присоединим к каждому элементу $x=\{A,\alpha\}$ многообразия M_{2n-1} точечные $R=\{A_J\}$ и тангенциальные $\tau=\{\alpha^J\}$ подвижные реперы пространства P_n, деривационные формулы которых имеют вид $dA_J=\omega_J^K A_K$, $d\alpha^J=-\omega_K^J\alpha^K$, причем I-формы ω_J^K удовлетворяют условиям

$$d\omega_J^K=\omega_J^L\wedge\omega_L^K, \qquad \sum\omega_J^J=0.$$

Положив $A=A_0$, $\alpha=\alpha^n$, перейдем к реперам $R_0(\tau^0)$ со структурными формами $\omega_0^p,\ \omega_0^n,\ \omega_p^n$ многообразия M_{2n-1}. Тогда регулярное распределение Δ_n на M_{2n-1} можно определить [5] системой $(n-1)$-линейно независимых форм Пфаффа

$$\Theta_p\equiv\omega_p^n-\Lambda_{pi}^n\omega_0^i \qquad (R\,\|\Lambda_{pi}^n\|=n-1),$$

что приводит к заданию на M_{2n-1} поля объекта $\Gamma_0\equiv\hat\Gamma_0$ [5].

Каждому одномерному многообразию $M_1=\{t^p,t^n,t_p\}\equiv\{t\}$ гиперплоских элементов в P_n соответствует пара $\{L_1,\ell_{n-2}\}$, где

$$L_1=[A_0,\ t^pA_p+t^nA_n],\qquad \ell_{n-2}=[\alpha^n,\ t_p\alpha^p+t_0\alpha^0],$$

$$t_0\equiv t^n,\quad \omega_0^p=t^p\theta,\quad \omega_0^n=t^n\theta,\quad \omega_p^n=t_p\theta,\quad d\theta=\theta\wedge\theta_1,$$

$\{t^p,t^n,t_p\}\equiv\{t\}$ -объект. Геометрически объект Γ_0 определяет [5] отображение h множества прямых L_1 на множество $(n-2)$-плоскостей ℓ_{n-2}, инцидентных A_0, α^n соответственно.

Перейдя к реперам $R_1(\tau^1)$, адаптированным регулярному распределению Δ_n на M_{2n-1}, получим, что система форм Θ_p приняла вид

$$\Theta_p\equiv\omega_p^n-\Lambda_{pq}^n\omega_0^q,\qquad \det\|\Lambda_{pq}^n\|\neq0.$$

Распределение Δ_n на M_{2n-1} порождает поле невырожденного тензора (г.ф.т.р.) $\hat\Gamma_0=\{\Lambda_{pq}^n\}$:

$$\nabla\Lambda_{pq}^n+\Lambda_{pq}^n\omega_0^0=\Lambda_{pqi}^n\omega_0^i+\Lambda_{pq}^{nr}\omega_r^n. \qquad (I)$$

Совокупность одномерных многообразий $M_1\{t\}\subset M_{2n-1}$, которым в P_n соответствуют инцидентные $\{L_1,\ell_{n-2}\}$, удовлетворяет условиям

$$t^n=0,\quad t^pt_p=0, \qquad (2)$$

определяющим асимптотический конус K_{2n-3} многообразия M_{2n-1}. В P_n (2) интерпретируются следующими системами условий (эквивалентными) двойственного характера

$$A_0\in\alpha^n,\quad [A_0\,dA_0]\subset\alpha^n,\quad [A_0\,dA_0\,d^2A_0]\subset\alpha^n; \qquad (2')$$

$$\alpha^n\ni A_0,\quad [\alpha^n\,d\alpha^n]\ni A_0,\quad [\alpha^n\,d\alpha^n\,d^2\alpha^n]\ni A_0. \qquad (2'')$$

2. Инвариантные одномерные многообразия гиперплоских элементов.

Система n форм Пфаффа

$$\omega_0^n,\quad \omega_p^n-\Lambda_{pq}^n\omega_0^q \qquad (3)$$

относительно инвариантна в силу уравнений подобъекта $\hat\Gamma_0\subset\Gamma_0$ и определяет главное подраспределение ${}^*\Delta_{n-1}\subset\Delta_n$ каждому интегральному многообразию ${}^*M_1=\{t^p,0,t_p-\Lambda_{pq}^nt^q=0\}$, которому в P_n соответствует пара подпространств $\{{}^*L_1,{}^*\ell_{n-2}\}$, инцидентных A_0, α^n одновременно. Система форм

$$\omega_0^n,\quad \omega_p^n+\Lambda_{qp}^n\omega_0^q \qquad (4)$$

также относительно инвариантна в силу уравнений $\hat\Gamma_0$ и определяет дополнительное к Δ_n распределение Δ_{n-1}^* интегральному одномерному многообразию $M_1^*=\{t^p,0,t_p+\Lambda_{qp}^nt^q=0\}$, которому в P_n соответствует пара подпространств $\{L_1^*,\ell_{n-2}^*\}$, также инцидентных A_0, α^n одновременно. При этом в каждой точке $x=\{A,\alpha\}$ касательного пространства T_xM_{2n-1} $\Delta_{n-1}^*(x)$ ортогонально $\Delta_n(x)$ относительно метрики, определяемой $K_{2n-3}(x)$.

Т е о р е м а 1. Если на M_{2n-1} задано регулярное распределение Δ_n и г.ф.т.р. несимметричен, то на M_{2n-1} в общем случае имеется $n-1$ пар одномерных многообразий $\{{}^*M_1^p,{}^pM_1^*\}$, касающихся K_{2n-3}, которым в P_n соответствуют совпадающие пары подпространств $\{{}^*L_1,{}^*\ell_{n-2}\}$ и $\{L_1^*,\ell_{n-2}^*\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из условий

$$\begin{cases}(\Lambda_{pq}^n+z\Lambda_{qp}^n)t^p=0, & \det\|\Lambda_{pq}^n+z\Lambda_{qp}^n\|=0,\\ {}^*M_1=\{t^p,0,t_p-\Lambda_{pq}^nt^q=0\}, & M_1^*=\{t^p,0,t_p+\Lambda_{qp}^nt^q=0\}\end{cases} \qquad (5)$$

или

$$\begin{cases}(\Lambda_0^{pq}+y\Lambda_0^{qp})t_q=0, & \det\|\Lambda_0^{pq}+y\Lambda_0^{qp}\|=0,\\ {}^*M_1=\{t^p-\Lambda_0^{pq}t_q=0,\ 0,\ t_p\}, & M_1^*=\{t^p+\Lambda_0^{qp}t_q=0,\ 0,\ t_p\},\end{cases} \qquad (5')$$

где $\Lambda_{pr}^n\Lambda_0^{rq}=\Lambda_{rp}^n\Lambda_0^{qr}=\delta_p^q$, совпадения пар $\{{}^*L_1,{}^*\ell_{n-2}\}$ и $\{L_1^*,\ell_{n-2}^*\}$ находим в общем случае $n-1$ пар одномерных многообразий

$\{{}^{*}M_1^p,\ {}^{p}M_1^*\}$ (инвариантных), которым в P_n соответствуют $n-1$ пар из инвариантных прямых ${}^{p}L_1$ и инвариантных $(n-2)$-плоскостей ${}_{n-p}\ell_{n-2}$.

Рассмотрим пересечение $K_{2n-3}(x)$ и $\Delta_n(x)$:

$$K_{n-2}(x):\ t^n=0,\ t_p-\Lambda^n_{pq}t^q=0,\ \Lambda^n_{(pq)}t^pt^q=0. \tag{6}$$

Конусу $K_{n-2}(x)$ в P_n соответствует конус k_{n-2} прямых L_1

$$k_{n-2}:\ x^n=0,\ \Lambda^n_{(pq)}x^px^q=0,\ \Lambda^n_{(pq)}=\frac{1}{2}(\Lambda^n_{pq}+\Lambda^n_{qp}) \tag{6'}$$

и конус k^{n-2} $(n-2)$-плоскостей $\ell_{n-2}=h(L_1)$

$$k^{n-2}:\ \xi_0=0,\ \tilde{\Lambda}^{(pq)}\xi_p\xi_q=0,\ \tilde{\Lambda}^{(pq)}_0=\frac{1}{2}(\Lambda^{pq}_0+\Lambda^{qp}_0), \tag{6''}$$

где x^J (ξ_J) -координаты тех точек (гиперплоскостей), которые инцидентны $L_1(\ell_{n-2})$, причем из (I) получаем

$$\tilde{\Lambda}^{(pq)}_0\Lambda^n_{p(r}\Lambda^n_{|q|s)}=\Lambda^n_{(rs)}. \tag{7}$$

3. Распределения Δ_n на M_{2n-1} при условии $\Lambda^n_{[pq]}\equiv 0$ ($n>3$).

Замыкая систему форм θ_p, а также (3) (или (4)), находим, что при этом условии инволютивное распределение Δ_n на M_{2n-1} имеет инволютивные ${}^{*}\Delta_{n-1}$ и Δ^*_{n-1} одновременно.

Т е о р е м а 2. Если на M_{2n-1} задано регулярное распределение Δ_n и $\Lambda^n_{[pq]}\not\equiv 0$, то конус k^{n-2} (k_{n-2}) касается конуса k_{n-2} (k^{n-2}) вдоль инвариантных прямых (($n-2$)-плоскостей).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (5)-(5′) вдоль инвариантных прямых ${}^{p}L_1$ (и только вдоль них при $\Lambda^n_{[pq]}\not\equiv 0$) подпространства $\mathcal{L}({}^{p}L_1)=[\alpha^n,\alpha^p\Lambda^n_{pq}t^q]$, $R({}^{p}L_1)=[\alpha^n,\alpha^p\Lambda^n_{qp}t^q]$ совпадают друг с другом, а также с $\Pi({}^{p}L_1)=[\alpha^n,\alpha^p\Lambda^n_{(pq)}t^q]$ и $B({}^{p}L_1)=[\alpha^n,\alpha^p\Lambda^n_{[pq]}t^q]$ [6]. Но $\mathcal{L}({}^{p}L_1)=h({}^{p}L_1)$, а $\Pi({}^{p}L_1)$- поляра прямой ${}^{p}L_1$ относительно конуса k_{n-2}. Поэтому $h({}^{p}L_1)$ инцидентна ${}^{p}L_1$ и является образующей конуса k^{n-2}, касается конуса k_{n-2}, а в силу обратимости преобразований $\mathcal{L}$, R, Π -инвариантной ($n-2$)-плоскостью на k^{n-2}.

Т е о р е м а 3. Если на M_{2n-1} задано регулярное распределение Δ_n и $\Lambda^n_{[pq]}\equiv 0$, то конус k^{n-2} (k_{n-2}) огибает конус k_{n-2} (k^{n-2}).

Для доказательства достаточно заметить, что в этом случае в уравнении (6″) имеем из (7) $\tilde{\Lambda}^{(pq)}_0=\Lambda^{(pq)}_0$, где $\Lambda^{(pr)}_0\Lambda^n_{(rq)}=\delta^q_p$.

Библиографический список

I. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов// Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.29-48.

2. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос//Тр. семинара по векторн.и тензорн.анализу.М.;Л.,1950.Вып.8.

3. Б о ч и л л о Г.П. Поля квадратичных конусов и распределения на многообразии всех гиперплоских элементов в P_n// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб. науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1988.Вып.19.С.15-19.

4. А к и в и с М.А. Многомерная дифференциальная геометрия: Уч.пособие/Калининск.ун-т.Калинин,1977.84с.

5. Б о ч и л л о Г.П. Распределения на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./ Калинингр.ун-т.Калининград,1984.Вып.15.С.9-13.

6. К а й з е р В.В. Расширения, сужения и сопряженные направления дифференцируемых распределений в многомерных проективных пространствах//Геометр.сб./Томский ун-т.Томск,1975.Вып.15.

УДК 514.76.

КЛИФФОРДОВЫ СТРУКТУРЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

М.П. Б у р л а к о в

(Чечено-Ингушский ун-т)

Пусть M -дифференцируемое многообразие $\dim M=m$. Обозначим TM -тотальное пространство касательного расслоения над многообразием M и $\mathcal{F}(TM)$ -модуль векторных полей на TM. В координатной окрестности $U\subset M$ каждая точка $z\in TM$, $z=(x,y)$, $x\in M$, $y\in T_x$ имеет локальные координаты $x^1,x^2,\ldots,x^m,y^1,y^2,\ldots,y^m$, а векторное поле $\tau\in\mathcal{F}(TM)$ в локальной записи имеет вид:

$$\tau=\xi^i(x,y)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^j(x,y)\frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{I}$$

Построим над модулем $\mathcal{F}(TM)$ бесконечномерную алгебру Грассмана $\Lambda(TM)$, элементами которой являются формальные суммы грассмановых (внешних) произведений элементов модуля $\mathcal{F}(TM)$. Алгебра $\Lambda(TM)$