$$(\Lambda+\lambda)-\frac{4k-1}{3(\Lambda-\lambda)}\leq(\Lambda+\lambda)+\frac{4k-1}{3(\Lambda-\lambda)}<0. \qquad (3.7)$$

Неравенства (3.6) и (3.7) имеют место, когда

$$\lambda<\Lambda<-\lambda,\ \lambda<0,\ \lambda^2-\Lambda^2>\tfrac{1}{3}(n-p)^{-1}(2n-1)(n+p-2), \qquad (3.8)$$

поэтому справедлива

Теорема 5. Если секционная кривизна K компактного риманова n-мерного многообразия M_n заключена в пределах $\lambda\leq K\leq\Lambda$ для постоянных λ и Λ, удовлетворяющих неравенствам (3.8), то на многообразии M_n не существует плоских p-форм, отличных от нулевых.

4. Приложение. Симплектической структурой на $2m$-мерном многообразии M_{2m} называется невырожденная замкнутая 2-форма. На римановом многообразии M_{2m}, кроме хорошо известных гармонических 2-форм, замкнутыми будут изученные выше плоские 2-формы. В частности, на двумерном римановом многообразии симплектической структурой будет 2-форма $\omega\wedge\omega'$, где ω и ω' суть независимые конциркулярные I-формы.

Пусть ω - плоская 2-форма, тогда 2-форма $\omega'=\hat{R}(\omega)$ будет замкнутой, а в случае невырожденности эндоморфизма $\hat{R}$, что очевидно, симплектической. Докажем это. Согласно предположению имеем

$$\nabla_{[s}\omega'_{ij]}=\nabla_{[s}R_{ij]kl}\,\omega^{kl}+R_{kl[ij}\nabla_{s]}\omega^{kl},$$

где $\nabla_{[s}R_{ij]kl}=0$ согласно второму тождеству Бианки и

$$R_{kl[ij}\nabla_{s]}\omega^{kl}=-2(n-1)^{-1}\delta\omega^{l}R_{l[sij]}=0$$

согласно уравнениям (2.I) и первому тождеству Бианки, поэтому $d\omega'=0$.

На основании теорем 3 - 5 нетрудно получить условия, препятствующие заданию на компактном многообразии плоских симплектических структур. При этом надо учитывать, что в этом случае $p=2$.

Замечание. Статья написана при поддержке РФФИ, проект № 94 - 0I - 0I595.

Библиографический список

1. Stepanov S.E. The seven classes of almost symplectic structures // Webs and quasigroups / Tver Gos. Univ. Tver, 1992. p. 93-96.

2. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948. 316 с.

3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.1. 344 с.

4. Yano K. Concircular geometry // Proc. Imp. Acad. 1940. V.16. p.195-200.

5. Fulton C. Parallel vector fields // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V.16. №1. p. 136-137.

6. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957. 152 с.

7. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.2. 414 с.

8. Bourguignon J.-P., Karcher H. Curvature operators: pinching estimates and geometric examples // Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4e série. 1978. V. 11. p. 71-92.

9. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: ФМ, 1961. 463 с.

УДК 514.75

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ m-МЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В КОНФОРМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К НЕМУ СВЯЗНОСТИ

Л.Ф.Филоненко

(Киевский институт ВВС)

§ I. Введение

Дифференциальная геометрия распределений многомерных линейных элементов в многообразиях была предметом многих исследований. Г.Ф.Лаптев и Н.М.Остиану [1], [2], предполагая наличие проективной связности в многообразии, свели изучение геометрии распределения к задаче построения геометрических объектов, охваченных фундаментальными объектами распределения, рассматривая его как подмногообразие в пространстве m-мерных линейных элементов в многообразии. Они выделили последовательность подобъектов, к которой сводится вся последовательность фундаментальных объектов при рассмотрении голономного распределения и фиксации одного его интегрального подмногообразия. В своих построениях они преимущественно ограни-

12 Зак. 1606

чивались этим подобъектом.

Изучением m-мерных распределений в n-мерном конформном пространстве занимался Р.Ф.Бронштейн [3], [4]. Указанный выше подобъект при этом не выделялся как основной, использовалось и его дополнение, относящееся в данном случае к ортогональному распределению.

В данной работе, исходя из геометрии квадратичной гиперполосы в n-мерном проективном пространстве P_n, рассматривается распределение m-мерных линейных элементов в $(n-1)$-мерном конформном пространстве, в основном в его проективной интерпретации. Построения Р.Ф.Бронштейна дополняются такими, которые используют лишь последовательность основных подобъектов. Значительное внимание уделяется возникающим при этом связностям как вейлевой связности во всем пространстве, так и разного рода касательным и нормальным связностям распределения. Все исследования, проведенные в настоящей работе, носят локальный характер. Индексы, применяемые в работе, принимают следующие значения:

$$\jmath, \mathcal{J}, \kappa = \overline{1, n-1}; \quad \hat\jmath, \hat{\mathcal{J}}, \hat\kappa = \overline{0, n}; \quad i, j, k = \overline{1, m}; \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}.$$

Оператор дифференцирования ∇ действует по закону

$$\nabla B^{\mathcal{J}}_{\kappa} = dB^{\mathcal{J}}_{\kappa} + B^{\jmath}_{\kappa}\,\omega^{\mathcal{J}}_{\jmath} - B^{\mathcal{J}}_{\jmath}\,\omega^{\jmath}_{\kappa}$$

§ 2. Оснащенное конформное пространство

1. Рассмотрим $(n-1)$-мерное конформное пространство C_{n-1} [5] и в нем репер, состоящий из двух точек A_0, A_n и $(n-1)$ проходящих через них независимых гиперсфер $A_\jmath$. Имеют место деривационные формулы $dA_{\hat\jmath} = \omega^{\hat\kappa}_{\hat\jmath} A_{\hat\kappa}$ и структурные уравнения

$$d\omega^{\hat\kappa}_{\hat\jmath} = \omega^{\hat{\mathcal{I}}}_{\hat\jmath} \wedge \omega^{\hat\kappa}_{\hat{\mathcal{I}}}.$$

В проективной интерпретации C_{n-1} представляет собой невырожденную гиперквадрику (абсолют) Q_{n-1} с уравнением $g_{\hat\jmath\hat\kappa} x^{\hat\jmath} x^{\hat\kappa} = 0$, $\det \| g_{\hat\jmath\hat\kappa} \| \neq 0$ в проективном пространстве P_n. Условие ее инвариантности можно после подходящей перенормировки привести к виду

$$\nabla g_{\hat\jmath\hat\kappa} = 0. \tag{2.1}$$

В силу адаптации выбранного репера имеют место соотношения

$$g_{00} = g_{0\jmath} = g_{n\jmath} = g_{nn} = 0. \tag{2.2}$$

Ограничив еще перенормировку условием $g_{0n} = -1$, получим в силу (2.2)

$$\| \omega^{\hat\kappa}_{\hat\jmath} \| = \begin{bmatrix} \omega^0_0 & \omega^{\kappa}_0 & 0 \\ \omega^0_\jmath & \omega^{\kappa}_\jmath & g_{\jmath\mathcal{I}}\,\omega^{\mathcal{I}}_0 \\ 0 & g^{\kappa\mathcal{I}}\omega^0_{\mathcal{I}} & -\omega^0_0 \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

где

$$g_{\jmath\mathcal{I}}\, g^{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \delta^{\mathcal{J}}_{\jmath}, \quad \nabla g_{\jmath\kappa} = 0, \quad \nabla g^{\jmath\kappa} = 0. \tag{2.4}$$

Часто обозначается $g_{\jmath\kappa} = (A_\jmath, A_\kappa)$. Этим определяется угловая метрика пространства C_{n-1}.

2. Пространство P_n называется нормализованным (в смысле А.П.Нордена [6, § 6.2]), если к его каждой точке x гладко присоединена гиперплоскость τ_{n-1}, не проходящая через эту точку и выполняющая роль нормали второго рода. Аналогично говорят [6, § 84], что конформное пространство C_{n-1} нормализовано, если к каждой точке $A_0 \in C_{n-1}$ гладко присоединена отличная от нее точка $M_n \in C_{n-1}$. В проективной интерпретации это означает, что точке $A_0 \in Q_{n-1}$ соответствует касательная к Q_{n-1} гиперплоскость в точке M_n, т.е. мы имеем пространство P_n с абсолютом Q_{n-1}, нормализованное в смысле А.П.Нордена.

Построим произвольное оснащение конформного пространства C_{n-1} в общем репере $\{A_0, A_\jmath, A_n\}$, интерпретируя C_{n-1} как Q_{n-1} в P_n и выбирая **точки** $M_0, M_\jmath, M_n$ нового репера следующим образом. Пусть точка M_0 совпадает с точкой $A_0 \in Q_{n-1} \subset P_n$, точки $M_\jmath$ движутся по касательной гиперплоскости к Q_{n-1} в точке A_0, а точка M_n является точкой касания другой касательной к Q_{n-1} гиперплоскости, проходящей через $M_\jmath$. Тогда

$$M_0 = A_0, \quad M_\jmath = A_\jmath + m_\jmath A_0,$$

$$M_n = A_n + g^{\jmath\kappa} m_\kappa A_\jmath + \tfrac{1}{2} g^{\mathcal{I}\kappa} m_\kappa m_{\mathcal{I}} A_0.$$

Заметим, что этот переход от исходного репера $\{A_0, A_\jmath, A_n\}$ к реперу $\{M_0, M_\jmath, M_n\}$ полностью определяется выбором точки $M_n \in Q_{n-1}$, отличной от $A_0 \in Q_{n-1}$.

Легко установить, что компоненты $\hat\omega^{\hat\kappa}_{\hat\jmath}$ инфинитезимальных перемещений репера $\{M_{\hat\jmath}\}$ выражаются через формы $\omega^{\hat\kappa}_{\hat\jmath}$ исходного репера следующим образом (причем сохраняется структура матрицы (2.3) при этих же $g_{\jmath\kappa}$, $g^{\jmath\kappa}$ и формул (2.4)):

$$\begin{cases} \hat\omega_0^J = \omega_0^J, & (а) \\ \hat\omega_0^0 = \omega_0^0 - m_J\,\omega^J, & (б) \\ \hat\omega_J^K = \omega_J^K + T_{JL}^K\,\omega^L, & (в) \end{cases} \qquad (2.5)$$

где
$$T_{JL}^K = m_J\,\delta_L^K - g^{KJ} g_{JL}\, m_J,$$
$$\hat\omega_J^0 = \omega_J^0 + dm_J + m_J\omega_0^0 - m_K\,\omega_J^K + \tfrac{1}{2} g^{KJ} g_{JL} m_J m_K\omega^L - m_L m_J\omega^L.$$

Нормализация означает, что из $\omega_0^J = 0$ должно следовать $\hat\omega_0^J = 0$, что равносильно
$$\nabla m_J = m_{JL}\,\omega^L - m_J\,\omega_0^0 - \omega_J^0. \qquad (2.6)$$

В силу этого
$$\hat\omega_J^0 = P_{JL}\,\omega^L, \qquad (2.7)$$
где
$$P_{JL} = m_{JL} + \tfrac{1}{2} g^{KJ} g_{JL} m_J m_K - m_L m_J. \qquad (2.8)$$

Из (2.7) следует, что
$$d\hat\omega_0^0 = P_{JL}\,\omega^J\wedge\omega^L = m_{JL}\,\omega^J\wedge\omega^L, \quad d\hat\omega_J^J = \hat\omega_J^K\wedge\hat\omega_K^J + \hat\Omega_J^J,$$
где
$$\hat\Omega_J^J = (P_{JQ}\,\delta_L^J - g^{JZ} g_{JL} P_{ZQ})\,\omega^Q\wedge\omega^L. \qquad (2.9)$$

Отсюда следует, что нормализованное конформное пространство C_{n-1} является пространством Вейля [6, §84]. Найдем $\hat\Omega_{KP}$, свертывая (2.9) с g_{JP}:
$$\hat\Omega_{KP} = \hat\Omega_K^J g_{JP} = (P_{KQ}\, g_{LP} - P_{PQ}\, g_{KL})\,\omega^Q\wedge\omega^L,$$
а отсюда получим
$$\hat R_{KP,QL} = P_{KQ}\, g_{LP} - P_{KL}\, g_{QP} - P_{PQ}\, g_{KL} + P_{PL}\, g_{KQ}.$$

Найдем выражение тензора Риччи
$$\hat R_{PL} = \hat R_{KP,LF}\, g^{KF} = (3-n)P_{PL} - g_{PL}\,\varphi,$$
где
$$\varphi = g^{KF} P_{KF}.$$

Если $R_{JK} = \frac{R}{n-1}\, g_{JK}$, то говорят об эйнштейновой связности Вейля.

Проведя в последнем соотношении свертывание с g^{PL}, вычислим скалярную кривизну $\hat R = 2\,(2-n)\varphi$.

На основании полученных значений $\hat R_{KP,LF}$, $\hat R_{PL}$, $\hat R$ вычислим тензор, введенный Вейлем [6] и названный им тензором конформной

кривизны:
$$\hat C_{JF,KL} = \hat R_{JF,KL} + \frac{1}{n-3}\left(\hat R_{JK}\, g_{FL} + \hat R_{FL}\, g_{JK} - \hat R_{JL}\, g_{FK} - \hat R_{FK}\, g_{JL}\right) + \frac{\hat R}{(n-2)(n-3)}\left(g_{FK}\, g_{JL} - g_{FL}\, g_{JK}\right).$$

Легко установить, что его значение для нашего случая равно нулю. Известно, что при $n>3$ обращение тензора конформной кривизны в нуль означает, что данное пространство несет конформно-евклидову связность Вейля [6, § 84].

При $m_{[JK]} = 0$, т.е. когда m_{JK} симметрично, следовательно, и P_{JK} симметрично. Следуя А.П.Нордену, мы будем говорить о гармоничной нормализации. В этом случае $d\hat\omega_0^0 = 0$, т.е. $\hat\omega_0^0 = d\lambda$. Перенормировкой $\widetilde M_0 = e^{-\lambda} M_0$ получим $d\widetilde M_0 = \widetilde\omega_0^J M_J$, где $\widetilde\omega_0^J = e^{-\lambda}\hat\omega^J$ и, как видно, $\widetilde\omega_0^0 = 0$. Кроме того, $d\widetilde\omega_0^J = \widetilde\omega_0^K\wedge\widetilde\omega_K^J$, причем сохраняются соотношения (2.4). Это показывает, что нормализованное C_{n-1} является римановым пространством.

Так как условие эйнштейновости приводит в нашем случае к симметричности тензора
$$P_{JL} = \frac{1}{n-1}\left(\varphi - g^{KJ} m_K m_J\right) g_{JL},$$
а следовательно, и m_{JL}, то эйнштейновость связности Вейля нормализованного пространства C_{n-1} означает гармоничность нормализации и приводит к связности конформно-плоского эйнштейнова риманова пространства. Известно, что конформно-плоское эйнштейново риманово пространство является пространством постоянной кривизны [11]. В данном случае это вытекает легко из того, что при $P_{JL} = \varkappa\, g_{JL}$ из (2.6) следует
$$\hat R_{KP,LF} = 2\varkappa\,(g_{KL}\, g_{PF} - g_{KF}\, g_{LP}).$$

Итак, если при нормализации конформного пространства C_{n-1} тензор P_{JL} пропорционален метрическому тензору, то полученное пространство является римановым пространством постоянной кривизны. В частном случае, когда $P_{JL} = 0$, т.е. нормализующая точка M_n абсолютно неподвижна, получается локально евклидово пространство [6, § 84].

§ 3. Распределение m-мерных линейных элементов конформного пространства

О п р е д е л е н и е. Линейным m-мерным элементом конформного пространства C_{n-1} называется пара (A, Δ_A^m), состоящая из точки $A \in C_{n-1}$, называемой центром элемента, и множества Δ_A^m проходящих через нее, касающихся между собой m-мерных сфер. Если к каждой точке $A \in C_{n-1}$ присоединен m-мерный линейный элемент с центром в A, гладко зависящий от A, то говорят, что в C_{n-1} задано распределение Δ m-мерных линейных элементов.

В проективной интерпретации $A \in Q_{n-1}$ и Δ_A^m есть m-мерная плоскость в P_n, касательная к Q_{n-1} в точке A.

Присоединим к (A, Δ_A^m) конформный репер, точка A_0 которого совпадает с центром A, гиперсферы $A_{m+1}, \ldots, A_{n-1}$ касаются присоединенного к A элемента, а гиперсферы $A_1, \ldots, A_m$ ему ортогональны. В P_n – соответственно $A_i \in \Delta_A^m$ и $A_\alpha \in {}^\perp\Delta_A^{n-m-1}$, где ${}^\perp\Delta_A^{n-m-1}$ полярно сопряжена к Δ_A^m на Q_{n-1}, т.е. ортогональна к Δ_A^m в угловой метрике.

Тогда, кроме (2.2), имеем $(A_i, A_\alpha) = g_{i\alpha} = 0$. В силу этого для форм в матрице (2.3) справедливы

$$\begin{cases} \nabla g_{ij} = 0, \quad \nabla g_{\alpha\beta} = 0, & \text{(а)} \\ g_{ij}\,\omega_\alpha^j + g_{\alpha\beta}\,\omega_i^\beta = 0, & \text{(б)} \end{cases} \qquad (3.1)$$

а для g^{ij}, $g^{\alpha\beta}$, определяемых из $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$, $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$, аналогично $\nabla g^{ij} = 0$, $\nabla g^{\alpha\beta} = 0$.

Так как при заданном распределении Δ при фиксации точки A_0 фиксируется и Δ_A^m, то

$$dA_i \equiv \omega_i^0 A_0 + \omega_i^j A_j \pmod{\omega_0^\alpha}$$

и поэтому

$$\omega_i^\alpha = \lambda_{ij}^\alpha\,\omega^j + \mu_{i\beta}^\alpha\,\omega^\beta. \qquad (3.2)$$

Обратно, при задании этой системы дифференциальных уравнений задано и распределение Δ m-мерных линейных элементов. В частном случае, когда распределение Δ инволютивно, говорят, что в C_{n-1} задано слоение. В таком случае листы слоения (интегральные m-мерные подмногообразия распределения Δ) образуют в некоторой окрестности $\mathcal{U} \subset C_{n-1}$ каждой точки локальное расслоение, слоями которого являются пересечения листов с $\mathcal{U}$.

Аналитически это означает, что присоединенная к (A, Δ_A^m) пфаффова система $\omega_0^\alpha = 0$ вполне интегрируема. Так как

$$d\omega_0^\alpha = \omega_0^0 \wedge \omega_0^\alpha + \omega_0^i \wedge \omega_i^\alpha + \omega_0^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \qquad (3.3)$$

то это в силу теоремы Фробениуса приводит к тому, что имеют место $\lambda_{ij}^\alpha = \lambda_{ji}^\alpha$. Фиксируя при этом некоторый лист распределения, мы имеем $\omega_0^\alpha = 0$, $\omega_i^\alpha = \lambda_{ij}^\alpha\,\omega^j$. Данный случай рассматривался нами в [7], [8]. Ниже мы исследуем распределение для (A, Δ_A^m) общего типа.

Проведя последовательное внешнее дифференцирование системы уравнений (3.2) с учетом (3.3), находим

$$\nabla\lambda_{ij}^\alpha = \lambda_{ijk}^\alpha\,\omega^k + \mu_{ij\beta}^\alpha\,\omega^\beta - \lambda_{ij}^\alpha\,\omega_0^0 - g_{ij}\,\omega_n^\alpha, \qquad (3.4)$$

$$\nabla\mu_{i\beta}^\alpha = \mu_{i\beta\gamma}^\alpha\,\omega^\gamma + \xi_{i\beta j}^\alpha\,\omega^j - \mu_{i\beta}^\alpha\,\omega_0^0 + g_{ij}\,\delta_\beta^\alpha\,\omega_n^j, \qquad (3.5)$$

где компоненты λ_{ijk}^α, $\mu_{ij\beta}^\alpha$, $\mu_{i\beta\gamma}^\alpha$, $\xi_{i\beta j}^\alpha$, вообще говоря, несимметричны по нижним индексам.

Из соотношения (3.1б) получим

$$\omega_\alpha^j = \lambda_{\alpha e}^j\,\omega^e + \mu_{\alpha\gamma}^j\,\omega^\gamma.$$

Обозначая величины, относящиеся к распределению $\Delta^\perp$ элемента $(A, {}^\perp\Delta_A^{n-m-1})$, дополнительным знаком $\perp$, имеем

$$\lambda_{\alpha e}^j = -g_{\alpha\beta}\,g^{jk}\,\lambda_{ke}^\beta = {}^\perp\mu_{\alpha e}^j, \qquad (3.6)$$

$$\mu_{\alpha\gamma}^j = -g_{\alpha\beta}\,g^{jk}\,\mu_{k\gamma}^\beta = {}^\perp\lambda_{\alpha\gamma}^j. \qquad (3.7)$$

Из (3.4) и (3.5) получим системы для этих величин, меняя роли латинских и греческих индексов коренных букв согласно (3.6), (3.7):

$$\nabla\lambda_{\alpha e}^j = \lambda_{\alpha e k}^j\,\omega^k + \mu_{\alpha e\beta}^j\,\omega^\beta - \lambda_{\alpha e}^j\,\omega_0^0 + g_{\alpha\beta}\,\delta_e^j\,\omega_n^\beta,$$

$$\nabla\mu_{\alpha\gamma}^j = \mu_{\alpha\gamma\beta}^j\,\omega^\beta + \lambda_{\alpha\gamma k}^j\,\omega^k - \mu_{\alpha\gamma}^j\,\omega_0^0 - g_{\alpha\gamma}\,\omega_n^j.$$

Назовем λ_{ij}^α (или ${}^\perp\lambda_{\alpha\gamma}^j$) основной частью объекта распределения Δ (или соответственно $\Delta^\perp$), а $\mu_{i\beta}^\alpha$ (или ${}^\perp\mu_{\alpha e}^j$) – дополнительной. Согласно общей теореме погруженных многообразий [9], вся дифференциальная геометрия распределения Δ определяется последовательностью фундаментальных геометрических объектов: $\{g_{ij}, g_{\alpha\beta}, \lambda_{ij}^\alpha, \mu_{i\beta}^\alpha\}$ и его продолжениями. Структура объектов данной последовательности довольно сложна. Поэтому постараемся построить охваченные ими более простые геометрические объекты, выяснить геометрический смысл которых гораздо легче и которые также целиком исчерпывают дифференциальную геометрию данного порядка распределения Δ.

Один путь для осуществления этого указывает построенная А.П.Норденом [6] теория нормализованных m-мерных подмногообразий n-мерного проективного или конформного пространства. Основной целью данной теории является получение связностей. Но в ней подмногообразия изучаются не сами по себе, а вместе с некоторой дополнительной конструкцией – нормализацией. Поэтому большинство результатов, полученных методом нормализации, связано не только с самим подмногообразием, но и с данной геометрической конструкцией. Только в том случае, когда удастся построить нормализацию, охваченную фундаментальными объектами, все полученные с ее помощью геометрические объекты и величины будут внутренним образом связаны с исходным подмногообразием. В таком случае говорят о внутреннем оснащении (или внутренней нормализации).

Такой подход перенесен и в геометрию распределений m-мерных линейных элементов в ряде случаев [1], [2], [10]. Ниже мы приводим его в случае конформного пространства.

§ 4. Внутреннее оснащение распределения Δ в конформном пространстве

1. Согласно [5], [6] оснащение m-мерного подмногообразия M_m в C_{n-1} определяется гладким сопоставлением каждой точке $A \in M_m$ некоторой точки $M_n \in C_{n-1}$, отличной от A. Аналогично, оснащение распределения Δ в C_{n-1} означает гладкое сопоставление каждой точке $A \in C_{n-1}$ как центру элемента $(A, \overset{m}{\Delta}_A)$ некоторой точки $M_n \in C_{n-1}$, отличной от A. Таким образом, оснащение распределения Δ – это просто нормализация всего пространства. Ниже мы покажем, как оснащение удается внутренним образом присоединить к заданному распределению Δ, т.е. определяющие его объекты охватить фундаментальными объектами распределения Δ.

Точку M_n можно представить в виде

$$M_n = A_n + g^{ik} m_k A_i + g^{\alpha\beta} m_\beta A_\alpha + x A_0, \qquad (4.1)$$

где

$$x = \frac{1}{2}\,(g^{ij} m_i m_j + g^{\alpha\beta} m_\alpha m_\beta).$$

Условие интегрируемости (2.6) равносильно теперь условиям:

$$\nabla m_i \equiv - m_i \omega_0^0 - \omega_i^0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega^j, \omega^\alpha), \qquad (4.2)$$

$$\nabla m_\alpha = - m_\alpha \omega_0^0 - \omega_\alpha^0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega^i, \omega^\beta). \qquad (4.3)$$

При выполнении данных условий гиперсферы $M_\alpha = A_\alpha + m_\alpha A_0$ определяют инвариантный пучок гиперсфер, касательных к элементу (A_0, Δ_{A_0}) и проходящих через точку M_n, а гиперсферы $M_i = A_i + m_i A_0$ порождают пучок инвариантных гиперсфер, нормальных к этому элементу, проходящих через инвариантную точку. Любой инвариантный p-параметрический пучок гиперсфер определяет некоторую $(n-m-2)$-мерную сферу в C_{n-1}, являющуюся пересечением всех гиперсфер пучка.

Результат предыдущих рассуждений можно теперь сформулировать следующим образом.

Т е о р е м а 1. Геометрические объекты m_i и m_α, удовлетворяющие системам уравнений (4.2) и (4.3), определяют соответственно нормальное и касательное оснащение распределения Δ. Вместе они определяют полное оснащение распределения Δ, а тем самым и нормализацию пространства C_{n-1}. При переходе к ортогонально дополняющему распределению они меняют свои роли.

О п р е д е л е н и е. Геометрические объекты m_i, m_α называются оснащающими объектами распределения Δ (а также $\Delta^\perp$).

Для того, чтобы инвариантное оснащение было внутренним образом связано с Δ, оснащающие объекты должны быть построены с помощью последовательности фундаментальных геометрических объектов распределения Δ. Ниже мы приводим такие построения.

2. Введем величины второго порядка

$$\lambda_\alpha = -\frac{1}{m}\, g_{\alpha\beta} \lambda_{ij}^\beta g^{ij}. \qquad (4.4)$$

С помощью (3.1а) и (3.4) легко установить, что

$$\nabla \lambda_\alpha = \lambda_{\alpha k} \omega^k - \lambda_\alpha \omega_0^0 + \omega_\alpha^0 + \eta_{\alpha\gamma} \omega^\gamma.$$

Сравнение с (4.3) показывает, что геометрический объект λ_α определяет инвариантное семейство касательных m-мерных сфер, внутренним образом связанное с m-мерным элементом распределения Δ в каждой точке пространства C_{n-1}. Это семейство состоит из пересечения гиперсфер

$$M_\alpha = A_\alpha - \lambda_\alpha A_0.$$

В результате получена

Т е о р е м а 2. Объект λ_α, охваченный основной частью фундаментального объекта второго порядка распределения Δ по формуле (4.4), определяет частичное внутренне инвариантное оснащение распределения Δ при помощи семейства m-мерных касательных сфер.

Заменяя в этой теореме распределение Δ ортогонально его дополняющим $\Delta^{\perp}$ и соответственно основную часть фундаментального объекта его дополнительной частью, мы можем сразу строить по формулам (3.7) и (4.4) аналогичный объект для $\Delta^{\perp}$:

$$\mu_i = -\frac{1}{n-m-1} g_{ij} \overset{\perp}{\lambda}{}^{j}_{\alpha\gamma} g^{\alpha\gamma} = \frac{1}{n-m-1} \mu^{\alpha}_{i\alpha}. \qquad (4.5)$$

Вместе с λ_α он задает уже полный оснащающий объект распределения Δ, внутренне инвариантным образом присоединенный к Δ. Из результатов, изложенных в § 2, теперь следует

Т е о р е м а 3. Задание распределения Δ m-мерных элементов в конформном пространстве C_{n-1} позволяет превратить C_{n-1} в конформно-плоское пространство Вейля с помощью нормализации, определяемой объектами $m_i = -\mu_i$ и $m_\alpha = -\lambda_\alpha$, построенными по формулам (4.4) и (4.5).

Назовем полученную таким образом связность Вейля первой конформно-плоской связностью Вейля, присоединенной к распределению Δ в C_{n-1}. На основании результатов, изложенных в § 2, нетрудно выделить случай, когда она является конформно-плоской римановой связностью, в частности, связностью постоянной кривизны.

3. Если имеем дело с фиксированным листом инволютивного распределения Δ, т.е. подмногообразием пространства C_{n-1}, то из фундаментального объекта остается лишь его основная часть λ^{α}_{ij}. Поэтому и в геометрии общих распределений Δ в C_{n-1} представляют интерес построения, использующие только основную часть λ^{α}_{ij} (в общем случае несимметричную) и ее продолжения в направлениях, принадлежащих распределению Δ.

С этой точки зрения нам осталось построить геометрический объект, который мог бы заменить μ_i и был бы охвачен лишь основной частью фундаментального объекта и его вышеуказанными продолжениями. Рассмотрим величины второго порядка:

$$b^{\alpha}_{ij} = \lambda^{\alpha}_{ij} - \lambda^{\alpha} g_{ij}. \qquad (4.6)$$

Для них получим

$$\nabla b^{\alpha}_{ij} = -b^{\alpha}_{ij}\,\omega^0_0 + b^{\alpha}_{ijk}\,\omega^k + \eta^{\alpha}_{ij\gamma}\,\omega^{\gamma}. \qquad (4.7)$$

Далее обозначим

$$y^{\beta}_{\alpha} = -g_{\alpha\gamma} g^{ik} g^{j\ell} b^{\gamma}_{ij} b^{\beta}_{k\ell} \qquad (4.8)$$

и получим

$$\nabla y^{\beta}_{\alpha} = -2 y^{\beta}_{\alpha}\,\omega^0_0 + y^{\beta}_{\alpha k}\,\omega^k + \eta^{\beta}_{\alpha\gamma}\,\omega^{\gamma}, \qquad (4.9)$$

т.е. y^{β}_{α} составляют относительный тензор.

Порядок матрицы $\| y^{\beta}_{\alpha} \|$ равен $n-m-1$. Ранг этой матрицы обозначим через S. По аналогии с работой [10] составим относительный инвариант

$$y = y^{\beta_1}_{[\alpha_1} y^{\beta_2}_{\alpha_2} \cdots y^{\beta_s}_{\alpha_s]}, \text{ где } \beta_1, \ldots, \beta_s = \overline{m+1, n-1}, \qquad (4.10)$$

который является суммой диагональных миноров порядка s тензора y^{β}_{α} и, следовательно, будет отличен от нуля. Получим уравнения

$$dy = sy\,(-2\omega^0_0 + y_k\,\omega^k + \eta_\gamma\,\omega^\gamma) \qquad (4.11)$$

и отсюда

$$\nabla y_i = -y_i\,\omega^0_0 - 2\omega_i + y_{ik}\,\omega^k + \eta_{i\gamma}\,\omega^{\gamma}. \qquad (4.12)$$

Сравнение с (4.2) покажет, что величины третьего порядка $\lambda_i = -\frac{1}{2} y_i$ (4.12) составляют вместе с величинами второго порядка λ_α, построенными ранее по формулам (4.4), пару оснащающих объектов. Пересечения гиперсфер $M_i = A_i - \lambda_i A_0$ будут внутренне инвариантной нормальной $(n-m-1)$-мерной сферой распределения Δ, построенной с помощью основной части его фундаментального объекта и его касательного продолжения.

Положив $m_k = -\lambda_k$ и $m_\beta = -\lambda_\beta$ в (4.1), мы получим инвариантную точку M_n, в которой пересекаются ранее построенные гиперсферы M_i, M_α. Указанные выше внутренне инвариантные m-сфера и $(n-m-1)$-сфера являются проходящими через нее касательной и нормальной сферами распределения соответственно. Итак, справедлива

Т е о р е м а 4. Задание распределения Δ в C_{n-1} позволяет превратить C_{n-1} в конформно-плоское пространство Вейля с помощью нормализации, определяемой объектами $m_i = -\lambda_i$ и $m_\alpha = -\lambda_\alpha$, построенными по формулам (4.6) – (4.12).

Построенную таким образом связность Вейля в C_{n-1} будем называть второй конформно-плоской связностью Вейля, присоединенной к распределению Δ.

Итак, из приведенных ранее построений следует, что репер $\{M_y\}$, внутренним инвариантным образом присоединенный к m-

13*

мерному линейному элементу распределения Δ в окрестности третьего порядка, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} M_0 = A_0, \quad M_i = A_i - \lambda_i A_0, \quad M_\alpha = A_\alpha - \lambda_\alpha A_0, \\ M_n = A_n + \lambda^\alpha A_\alpha + \lambda^i A_i + \frac{1}{2}(\lambda_\alpha \lambda^\alpha + \lambda_i \lambda^i) A_0, \end{cases} \tag{4.13}$$

где

$$\lambda^\alpha = -g^{\alpha\beta}\lambda_\beta, \quad \lambda^i = -g^{ij}\lambda_j.$$

§ 5. Связности, присоединенные к распределению m-мерных линейных элементов конформного пространства

I. Существенные формы в матрице (2.3) удовлетворяют следующим структурным уравнениям конформного пространства C_{n-1}:

$$d\omega_0^0 + \omega_J^0 \wedge \omega_0^J = 0, \tag{5.1}$$

$$d\omega_0^K + (\omega_J^K - \delta_J^K \omega_0^0) \wedge \omega_0^J = 0, \tag{5.2}$$

$$d\omega_K^J - \omega_K^L \wedge \omega_L^J + \omega_0^J \wedge \omega_K^0 + g^{JL} g_{KS}\, \omega_L^0 \wedge \omega_0^S = 0, \tag{5.3}$$

$$d\omega_K^0 + \omega_J^0 \wedge (\omega_K^J - \delta_K^J \omega_0^0) = 0, \tag{5.4}$$

кроме того,

$$dg_{JK} = g_{JK}\,\omega_J^J + g_{JJ}\,\omega_K^J.$$

Пусть задано распределение Δ m-мерных линейных элементов в C_{n-1}, и пусть репер адаптирован к нему так, как в § 3. Тогда из уравнения (5.3) при $K=\alpha$, $J=\beta$ в силу (3.2) следует

$$d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = \Omega_\alpha^\beta,$$

где $\Omega_\alpha^\beta = R^\beta_{\alpha IJ}\,\omega^I \wedge \omega^J$ являются полубазовыми. Здесь

$$R^\beta_{\alpha ij} = \lambda^\beta_{K[i}\lambda^K_{|\alpha|j]}, \quad R^\beta_{\alpha i\gamma} = \lambda^\beta_{Ki}\mu^K_{\alpha\gamma} - \lambda^K_{\alpha i}\mu^\beta_{K\gamma}, \quad R^\beta_{\alpha\gamma\sigma} = \mu^\beta_{i[\gamma}\mu^i_{|\alpha|\sigma]}.$$

По теореме Картана-Лаптева в расслоении над C_{n-1}, слоями которого являются ${}^1\Delta^{n-m-1}$ как векторные пространства, возникает связность. Формами связности являются ω_α^β, удовлетворяющие уравнениям

$$dg_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}\,\omega_\beta^\gamma + g_{\gamma\beta}\,\omega_\alpha^\gamma,$$

формами кривизны будут Ω_α^β. Эта связность называется нормальной связностью распределения Δ. Заметим, что в частном случае, когда распределение Δ голономно (инволютивно) и фиксировано одно его интегральное подмногообразие, т.е. когда $\lambda^\alpha_{[ij]} = 0$ и

$\omega_0^\alpha = 0$, мы приходим к случаю, рассмотренному в [6]. Полученная нормальная связность для распределения Δ будет евклидовой. Назовем ее нормальной евклидовой связностью для распределения Δ. Заметим, что она евклидова и возникает без всякого оснащения и может быть интерпретирована, аналогично [8], как связность, индуцированная структурой первой конформно-плоской связности Вейля, присоединенной к распределению Δ в C_{n-1}.

2. В § 4 построено инвариантное оснащение распределения Δ. Точки M_0, M_n и проходящие через них гиперсферы могут быть приняты на элементы инвариантного репера. Из соотношений (2.5) легко получить связь между формами $\hat{\omega}_{\hat{J}}^{\hat{J}}$ исходного репера и формами инвариантного репера:

$$\theta_0^0 = \omega_0^0 - m_i\omega^i - m_\alpha\omega^\alpha, \quad \theta_0^n = \omega_0^n = 0,$$

$$\theta_0^\alpha = \omega_0^\alpha, \quad \theta_0^i = \omega_0^i, \quad \theta_\alpha^n = g_{\alpha\beta}\,\omega_0^\beta, \quad \theta_i^n = g_{ij}\,\omega^j,$$

$$\theta_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta + m_\alpha\omega^\beta - g^{\beta\sigma}g_{\alpha\gamma}m_\sigma\omega^\gamma,$$

$$\theta_i^j = \omega_i^j + m_i\omega^j - g^{je}g_{ik}m_e\omega^k,$$

$$\theta_\alpha^i = \omega_\alpha^i + m_\alpha\omega^i - g^{it}g_{\alpha\beta}m_t\omega^\beta,$$

$$\theta_i^\alpha = \omega_i^\alpha + m_i\omega^\alpha - g_{ij}g^{\alpha\beta}m_\beta\omega^j.$$

Отсюда для $\tilde{\theta}_\alpha^\beta = \theta_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta\theta_0^0$ и $\tilde{\theta}_i^j = \theta_i^j - \delta_i^j\theta_0^0$ получаем соответственно

$$d\tilde{\theta}_\alpha^\beta = \tilde{\theta}_\alpha^\gamma \wedge \tilde{\theta}_\gamma^\beta + \tilde{R}^\beta_{\alpha\gamma k}\,\theta^\gamma \wedge \theta^k + \tilde{R}^\beta_{\alpha ke}\,\theta^k \wedge \theta^e + \tilde{R}^\beta_{\alpha\gamma\sigma}\,\theta^\gamma \wedge \theta^\sigma$$

и

$$d\tilde{\theta}_i^j = \tilde{\theta}_i^k \wedge \tilde{\theta}_k^j + R^j_{iek}\,\theta^e \wedge \theta^k + R^j_{i\alpha\gamma}\,\theta^\alpha \wedge \theta^\gamma + R^j_{ik\gamma}\,\theta^k \wedge \theta^\gamma.$$

По теореме Картана-Лаптева возникают вейлевы связности как в нормальном, так и в касательном расслоении распределения Δ. Эту общую схему можно теперь применить в случае построенных ранее внутренне инвариантных оснащений как при $m_i = -\mu_i$ и $m_\alpha = -\lambda_\alpha$, так и при $m_i = -\lambda_i$ и $m_\alpha = -\lambda_\alpha$. Нормальные связности для обоих случаев совпадают, так как m_i при этом не используется, мы будем говорить о нормальной вейлевой связности распределения Δ. В случае инволютивного распределения Δ она совпадает с соответствующей связностью каждого листа как подмногообразия, построенной в [8]. Касательные связности получаются разные. Заметим, что вторая из них совпадает для каждого листа с той вейлевой связностью, которую построил М.А. Акивис для m-мерного подмногообразия C_{n-1} в своей докторской диссертации "Конформно-дифференциальная геометрия многомерных поверхностей" (М., 1964).

Библиографический список

1. Лаптев Г.Ф. Распределение касательных элементов// Тр. геометр. семинара. М., 1971. Т.3. С.29-48.

2. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геометр. семинара. М., 1971. Т.3. С.49-91.

3. Бронштейн Р.Ф. Об одном классе многомерных распределений в конформном пространстве // Ткани и квазигруппы / Калининский ун-т. Калинин, 1982. С.18-24.

4. Бронштейн Р.Ф. К конформной теории многомерных распределений // Геометрия погруженных многообразий: М., 1983. С.17-25.

5. Акивис М.А. Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства // ДАН СССР. 1952. Т.82. № 3. С.325-328; Мат. сб. Т.31. № 1. 1952. С.43-75.

6. Норден А.П. Пространства аффинной связности.М., 1976. 432 с.

7. Филоненко Л.Ф. Об инвариантном оснащении квадратичной гиперполосы QH_m в окрестности третьего порядка ее образующего элемента // Латв. мат. ежегодник. Рига, 1986. Вып. 30. С.168-173.

8. Филоненко Л.Ф. Квадратичная гиперполоса и нормальные связности подмногообразия конформного пространства // Уч. зап. Тартусского ун-та. 1988. Вып.803. С.115-132.

9. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. о-ва. 1953. № 2. С.275-382.

10. Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II // Тр. геометр. семинара. М., 1971. Т.3. С.95-114.

11. Schouten J.A. Über die Konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeit mit quadratischer Mass-Bestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Bestimmung // Math. Ztschr. 1927. Bd. 11.- S. 58-88.

УДК 514.7

ЕДИНИЧНОЕ ТОРСООБРАЗУЮЩЕЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

И.И.Цыганок, С.Е.Степанов

(Владимирский государственный педагогический университет)

1. Введение. Рассмотрим n-мерное многообразие M с аффинной связностью ∇. Выделим на M векторное поле ξ. В области своего задания поле ξ порождает тензорное поле A, такое, что

$$AX = \nabla_X \xi \tag{1.1}$$

для любого $X \in TM$. Векторное поле ξ называется торсообразующим, если существует функция $\lambda: M \to \mathbb{R}$ и 1-форма θ на M, такие, что

$$A = \lambda\, id + \theta \otimes \xi. \tag{1.2}$$

Очевидно, что интегральными кривыми торсообразующего векторного поля служат геодезические линии.

Рассмотрим 1-мерное распределение $\Delta(\xi)$, каждое векторное поле ξ^* которого имеет вид $\xi^* = f\xi$ для некоторой функции $f: M \to \mathbb{R}$. Если поле ξ, порождающее $\Delta(\xi)$, является торсообразующим, то торсообразующим будет и поле ξ^*. Действительно, из (1.2) и $A^* = \nabla \xi^*$ последует

$$A^*X = (f\lambda)X + \{\theta(X) + f^{-1}X(f)\}\xi^*. \tag{1.3}$$

На этом основании говорят о торсообразующем поле 1-мерных направлений $\Delta(\xi)$.

Термин "торсообразующее поле направлений" принадлежит К. Яно [1]. В частности, им было доказано, что в евклидовом n-мерном пространстве направления такого поля, проходящие через точки любой кривой, образуют торс. Введение этого понятия оказалось очень плодотворным. Первые итоги исследований торсообразующих векторных полей и смежных вопросов были подведены в монографии [2]. Интерес к торсообразующим векторным полям сохраняется и до настоящего времени (см., например, [3], [4] и [5]). Так, в частности, одним из авторов было доказано в [5], что в n-мерном аффинном пространстве торсообразующее векторное поле принадлежит связке прямых с собственным или несобственным центром. Настоящая статья продолжает исследования тор-