2. *Сабитов И.Х.* Изометрические погружения и вложения плоского листа Мёбиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. 2007. Т. 71, №5. С. 197—224.

3. *Чешкова М.А.* О бутылке Клейна // Известия Алтайского университета. 2012. №1/1. С. 130—133.

M. Cheshkova

To geometries of the Mobius band and the Klein bottle

We consider in the Euclidean space the Mebius band and the Klein bottle. The examples of these surfaces are constructed using the mathematical paskage Maple.

УДК 514.76

Ю.И. Шевченко

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Классификация пространств проективной связности

В n-мерном пространстве проективной связности Картана $P_{n,n}$ из тензора проективной кривизны-кручения выделен тензор аффинной кривизны-кручения, содержащий тензор кручения. Доказано, что аналоги тождеств Риччи — Бьянки инвариантны лишь в пространстве с реальным кручением, когда тензор кручения выражается через одновалентный тензор. При продолжении структурных уравнений гладкого многообразия с помощью леммы Лаптева определены голономные и полуголономные многообразия. Тождества Риччи — Бьянки позволили показать полуголономность пространства проективной связности $P_{n,n}$, которая сохраняется в пространстве без кручения $P'_{n,n}$. Введен тензор неголономности пространства $P'_{n,n}$, обращение которого в нуль выделяет голономное пространство ${}^{H}P'_{n,n}$. Произведена классификация пространств проективной связности Картана.

Ключевые слова: проективная связности Картана, тензор кривизны-кручения, тождества Риччи — Бьянки, лемма Лаптева, голономность, полуголономность.

§ 1. Тождества Риччи — Бьянки в пространстве проективной связности

Пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ имеет размерность n как гладкое многообразие и размерность $n(n+2)$ как расслоение центропроективных реперов. Структурные уравнения пространства $P_{n,n}$ $(n \geq 2)$ запишем в виде [1; 2]

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \tag{1}$$

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \delta^i_j \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \tag{2}$$

$$D\omega_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + R_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k, \tag{3}$$

где $i,... = \overline{1,n}$, коэффициенты при внешних произведениях базисных форм ω^i антисимметричны по двум индексам

$$S^i_{(jk)} = 0, \quad R^i_{j(kl)} = 0, \quad R_{i(jk)} = 0, \tag{4}$$

где круглые скобки обозначают симметрирование.

Картан ввел пространство проективной связности $P_{n,n}$ как обобщение проективного пространства P_n. Действительно, уравнения (1—3) обобщают структурные уравнения проективной группы $GP(n)$, эффективно действующей в пространстве P_n [1; 2]:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j,$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i, \tag{5}$$

$$D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j .$$

Естественно предполагалось, что объект $R = \{S_{jk}^i, R_{jkl}^i, R_{ijk}\}$, называемый кривизной-кручением, является тензором. Тогда при $R = 0$ структурные уравнения (1—3) пространства $P_{n,n}$ становятся уравнениями (5) проективной группы $GP(n)$.

Найдем дифференциальные уравнения компонент объекта кривизны-кручения R и аналоги тождеств Риччи — Бьянки. Продифференцируем внешним образом дифференциальные уравнения (1—3), приведем подобные члены и вынесем произведения базисных форм

$$[\Delta S_{jk}^i + (S_{mk}^i S_{lj}^m + S_{mj}^i S_{kl}^m - R_{jkl}^i)\omega^l] \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0,$$

$$\begin{aligned} &[\Delta R_{jkl}^i - \delta_j^i S_{kl}^m \omega_m - S_{kl}^i \omega_j + (\delta_j^i R_{klm} + \delta_k^i R_{jlm} + \\ &\quad + R_{jpl}^i S_{mk}^p + R_{jpk}^i S_{lm}^p)\omega^m] \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$[\Delta R_{ijk} + R_{ijk}^l \omega_l + (R_{imk} S_{lj}^m + R_{imj} S_{kl}^m)\omega^l] \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0,$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta S_{jk}^i = dS_{jk}^i + S_{jk}^l \omega_l^i - S_{lk}^i \omega_j^l - S_{jl}^i \omega_k^l .$$

На основе кубичных уравнений (6) составляем дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} &\Delta S_{jk}^i = S_{jkl}^i \omega^l, \quad \Delta R_{ijk} + R_{ijk}^l \omega_l = R_{ijkl} \omega^l, \\ &\Delta R_{jkl}^i - \delta_j^i S_{kl}^m \omega_m - S_{kl}^i \omega_j = R_{jklm}^i \omega^m, \end{aligned} \tag{7}$$

причем в соответствии с условиями (4) пфаффовы производные компонент тензора кривизны-кручения R антисимметричны по двум индексам

$$S^i_{(jk)l} = 0, \; R^i_{j(kl)m} = 0, \; R_{i(jk)l} = 0.$$

Теорема 1. *Объект кривизны-кручения* $R = \{S^i_{jk}, R^i_{jkl}, R_{ijk}\}$ *пространства проективной связности Картана* $P_{n,n}$ *является тензором, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (7). Тензор проективной кривизны-кручения R содержит тензор аффинной кривизны-кручения* $\overline{R} = \{S^i_{jk}, R^i_{jkl}\}$, *который включает тензор кручения* S^i_{jk}.

Подставим дифференциальные уравнения (7) в кубичные уравнения (6), вынесем базисные формы из квадратных скобок, тогда альтернированные коэффициенты при тройных внешних произведениях базисных форм должны обратиться в нуль

$$S^i_{[jkl]} + S^i_{m[k} S^m_{lj]} + S^i_{m[j} S^m_{kl]} - R^i_{[jkl]} = 0,$$

$$R^i_{j[klm]} + \delta^i_j R_{[klm]} + R_{j[lm} \delta^i_{k]} + R^i_{jp[l} S^p_{mk]} + R^i_{jp[k} S^p_{lm]} = 0,$$

$$R_{i[jkl]} + R_{im[k} S^m_{lj]} + R_{im[j} S^m_{kl]} = 0,$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование по трем индексам. Во всех квадратных скобках есть антисимметричная пара индексов, поэтому альтернирование преобразуем в циклирование, приведем подобные и получим аналоги тождеств Риччи — Бьянки (см.: [3]):

$$I^i_{jkl} \overset{def}{=} S^i_{\{jkl\}} + 2S^i_{m\{j} S^m_{kl\}} - R^i_{\{jkl\}} = 0,$$

$$II^i_{jklm} \overset{def}{=} R^i_{j\{klm\}} + \delta^i_j R_{\{klm\}} + R_{j\{kl} \delta^i_{m\}} + 2R^i_{jp\{k} S^p_{lm\}} = 0, \qquad (8)$$

$$III_{ijkl} \overset{def}{=} R_{i\{jkl\}} + 2R_{im\{j} S^m_{kl\}} = 0,$$

где фигурные скобки обозначают циклирование по трем индексам.

§ 2. Особенность кручения пространства проективной связности

Для нахождения условий инвариантности тождеств (8) продолжим дифференциальные уравнения (7) компонент тензора кривизны-кручения R. Запишем уравнения (7) подробно, продифференцируем с помощью структурных уравнений (1—3), вынесем базисные формы, приведем подобные и используем оператор Δ

$$[\Delta S^i_{jkl} + (...)^i_{jklm}\omega^m] \wedge \omega^l = 0,$$

$$\begin{aligned}&[\Delta R^i_{jklm} - (\delta^i_m R^p_{jkl} + \delta^i_j S^p_{klm})\omega_p + (R^i_{mkl} - S^i_{klm})\omega_j + \\ &+2R^i_{jkl}\omega_m + R^i_{jml}\omega_k + R^i_{jkm}\omega_l + (...)^i_{jklmp}\omega^p] \wedge \omega^m = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[\Delta R_{ijkl} + 3R_{ijk}\omega_l + R_{ijl}\omega_k + R_{ilk}\omega_j + \\ &+ R_{ljk}\omega_i + R^m_{ijkl}\omega_m + (...)_{ijklm}\omega^m] \wedge \omega^l = 0.\end{aligned}$$

Разрешим квадратичные уравнения по лемме Картана, запишем результат в виде сравнений по модулю базисных форм и опустим невыписанные слагаемые

$$\Delta S^i_{jkl} \cong 0 \quad (\mathrm{mod} \quad \omega^m),$$

$$\begin{aligned}&\Delta R^i_{jklm} + 2R^i_{jkl}\omega_m + R^i_{jml}\omega_k + R^i_{jkm}\omega_l - \\ &-(\delta^i_m R^p_{jkl} + \delta^i_j S^p_{klm})\omega_p + (R^i_{mkl} - S^i_{klm})\omega_j \cong 0,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\Delta R_{ijkl} + 3R_{ijk}\omega_l + R_{ijl}\omega_k + R_{ilk}\omega_j + R_{ljk}\omega_i + R^m_{ijkl}\omega_m \cong 0.$$

Проциклируем эти дифференциальные сравнения по трем индексам и приведем подобные

$$\Delta S^i_{\{jkl\}} \cong 0,$$

$$\Delta R^i_{j\{klm\}} - (R^p_{j\{kl}\delta^i_{m\}} + \delta^i_j S^p_{\{klm\}})\omega_p + (R^i_{\{mkl\}} - S^i_{\{klm\}})\omega_j \cong 0, \tag{10}$$

$$\Delta R_{i\{jkl\}} + R_{i\{jk}\omega_{l\}} + R_{\{jkl\}}\omega_i + R^m_{i\{jkl\}}\omega_m \cong 0.$$

Исходя из тождеств (8), введем обозначения

$$A^i_{jkl} = 2S^i_{m\{j}S^m_{kl\}} - R^i_{\{jkl\}},\ C_{ijkl} = 2R_{im\{j}S^m_{kl\}},$$

$$B^i_{jklm} = \delta^i_j R_{\{klm\}} + R_{j\{kl}\delta^i_{m\}} + 2R^i_{jp\{k}S^p_{lm\}}.$$

С помощью дифференциальных уравнений (7) получим сравнения

$$\Delta A^i_{jkl} + \delta^i_{\{j}S^m_{kl\}}\omega_m + S^i_{\{kl}\omega_{j\}} \cong 0,\ \Delta C_{ijkl} + 2R^p_{im\{j}S^m_{kl\}}\omega_p \cong 0,$$

$$\Delta B^i_{jklm} + \delta^i_j R^p_{\{klm\}}\omega_p + R^p_{j\{kl}\delta^i_{m\}}\omega_p -$$
$$- 2\delta^i_j S^p_{q\{k}S^q_{lm\}}\omega_p - 2S^i_{q\{k}S^q_{lm\}}\omega_j \cong 0.$$

Прибавим эти сравнения к соответствующим сравнения (10) и используем обозначения (8):

$$\Delta I^i_{jkl} + \delta^i_{\{j}S^m_{kl\}}\omega_m + S^i_{\{jk}\omega_{l\}} \cong 0, \tag{11}$$

$$\Delta II^i_{jklm} - \delta^i_j I^p_{klm}\omega_p - I^i_{klm}\omega_j \cong 0, \tag{12}$$

$$\Delta III_{ijkl} + II^m_{ijkl}\omega_m \cong 0. \tag{13}$$

Из дифференциальных сравнений (11) видно, что объект I^i_{jkl} образует тензор только в совокупности с тензором кручения S^i_{jk}, поэтому, тождества (8_1), вообще говоря, не инвариантны. Но они должны выполняться, так как являются следствиями структурных уравнений (1).

Преобразуем сравнения (11)

$$\Delta I^i_{jkl} + (\delta^i_{\{j}S^m_{kl\}} + S^i_{\{jk}\delta^m_{l\}})\omega_m \cong 0.$$

Объект I^i_{jkl} будет тензором в пространстве $P_{n,n}$ лишь при выполнении системы линейных однородных уравнений

$$\delta^i_{\{j}S^m_{kl\}} + S^i_{\{jk}\delta^m_{l\}} = 0. \tag{14}$$

Раскроем циклирование, свернем по индексам *l*, *m* и приведем подобные

$$-\delta^i_j S_k + \delta^i_k S_j + (n-1) S^i_{jk} = 0\,, \tag{15}$$

$$S_k = S^i_{ik} = -S^i_{ki}\,. \tag{16}$$

Следовательно,

$$S^i_{jk} = \frac{1}{n-1}(\delta^i_j S_k - \delta^i_k S_j)\,. \tag{17}$$

Получили решение (17) следствия (15) системы уравнений (14). Подстановка выражений (17) в систему (14) приводит к тождествам. Сворачивание уравнений (14) по индексам *i*, *l* приводит к той же формуле (17). Свертки по другим индексам также не дают новых решений системы (14). Значит, (17) — единственное нетривиальное при $S_k \neq 0$ решение системы (14), которое назовем реальным кручением.

Теорема 2. *Аналог тождеств Риччи* (8_1) *инвариантен в пространстве проективной связности* $P_{n,n}$ *тогда и только тогда, когда тензор кручения* S^i_{jk} *выражается через одновалентный тензор* S_k *по формуле (17).*

Следствие. *В пространстве проективной связности без кручения* $P'_{n,n}$ *тождества* (8_1) *инвариантны.*

Действительно, система (14) удовлетворяется тривиальным решением $S^i_{jk} = 0$, которое дает формула (17) при $S_k = 0$.

Вывод. *В пространстве проективной связности Картана* $P_{n,n}$ *справедлива формула (17), поэтому пространство* $P_{n,n}$ *может обладать только реальным кручением.*

В силу тождеств Риччи $I^i_{jkl} = 0$ сравнения (12) принимают тензорный вид $\Delta II^i_{jklm} \cong 0$, поэтому инвариантен аналог тождестсв Бьянки $II^i_{jklm}=0$. В этом случае сравнения (13) имеют вид $\Delta III_{ijkl}\cong 0$, поэтому инвариантен 3-й аналог тождеств Риччи — Бьянки $III_{ijkl}=0$.

Теорема 3. *В пространстве проективной связности Картана $P_{n,n}$, обладающем лишь реальным кручением (17), инвариантны три аналога тождеств Риччи — Бьянки (8).*

§ 3. Полуголономное и голономное пространства проективной связности

Рассмотрим *n*-мерное гладкое многообразие M_n со структурными уравнениями Лаптева [4]:

$$D\omega^i=\omega^j\wedge\theta^i_j. \tag{18}$$

Продолжая их, получим

$$D\theta^i_j=\theta^k_j\wedge\theta^i_k+\omega^k\wedge\theta^i_{jk}, \tag{19}$$

причем согласно лемме Лаптева [4] выполняется условие

$$\theta^i_{jk}\wedge\omega^j\wedge\omega^k=0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \theta^i_{[jk]}\wedge\omega^j\wedge\omega^k=0,$$

которое раскрывается следующим образом:

$$\theta^i_{[jk]}=\lambda^i_{jkl}\omega^l;\; \lambda^i_{(jk)l}=0,\; \lambda^i_{[jkl]}=0\Rightarrow \lambda^i_{\{jkl\}}=0. \tag{20}$$

В общем случае, когда $\lambda^i_{jkl}\neq 0$, т. е. формы θ^i_{jk} несимметричны: $\theta^i_{[jk]}\neq 0$ будем говорить о полуголономном гладком многообразии M_n (ср.: [5; 6]). В особом случае

$$\lambda^i_{jkl}=0\Leftrightarrow\theta^i_{[jk]}=0$$

назовем M_n голономным гладким многообразием ${}^H M_n$. Наконец, если $\theta^i_{jk}=0$, то будем называть M_n тривиальным гладким многообразием.

Исследуем степень нетривиальности пространства проективной связности $P_{n,n}$. Преобразуем структурные уравнения (1) к виду (18), тогда

$$\theta_j^i = \omega_j^i + S_{jk}^i \omega^k . \tag{21}$$

Найдем внешние дифференциалы этих форм с помощью структурных уравнений (1, 2):

$$\begin{aligned} D\theta_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + \\ &+ (dS_{jk}^i - S_{jm}^i \omega_k^m) \wedge \omega^k + (R_{jkl}^i + S_{jm}^i S_{kl}^m) \omega^k \wedge \omega^l . \end{aligned} \tag{22}$$

Преобразуем 1-е слагаемое, выражая формы ω_j^i из равенств (21):

$$\omega_j^m \wedge \omega_m^i = \theta_j^m \wedge \theta_m^i - S_{jk}^m \omega^k \wedge \theta_m^i - \theta_j^m \wedge S_{ml}^i \omega^l + S_{jk}^m \omega^k \wedge S_{ml}^i \omega^l .$$

Здесь во 2-м и 3-м слагаемых воспользуемся обозначением (21) непосредственно

$$\omega_j^k \wedge \omega_k^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i - S_{jk}^m \omega^k \wedge \omega_m^i - \omega_j^m \wedge S_{ml}^i \omega^l - S_{jk}^m \omega^k \wedge S_{ml}^i \omega^l .$$

Подставим это выражение в формулу (22) и внесем слагаемые с базисными формами и их произведениями в соответствующие скобки

$$\begin{aligned} D\theta_j^i &= \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + \Delta S_{jk}^i \wedge \omega^k + \\ &+ (R_{jkl}^i + S_{jm}^i S_{kl}^m - S_{jk}^m S_{ml}^i) \omega^k \wedge \omega^l . \end{aligned}$$

Воспользуемся дифференциальными уравнениями (7_1) для компонент тензора кручения S_{jk}^i, объединим слагаемые с внешними произведениями $\omega^k \wedge \omega^l$ и проальтернируем коэффициенты при них по индексам k, l:

$$D\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + \mathcal{R}_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l , \tag{23}$$

$$\mathcal{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i + S_{jm}^i S_{kl}^m + S_{j[k}^m S_{l]m}^i - S_{j[kl]}^i . \tag{24}$$

Подставим структурные уравнения (23) в виде (19), где

$$\theta^i_{jk} = \mathcal{R}^{\ i}_{jkl}\omega^l - \delta^i_j\omega_k - \delta^i_k\omega_j\ . \tag{25}$$

Произведем альтернирование

$$\theta^i_{[jk]} = \mathcal{R}^{\ i}_{[jk]l}\omega^l\ . \tag{26}$$

С целью проверки условия (20_4) проциклируем коэффициенты этих форм

$$\mathcal{R}^{\ i}_{\{[jk]l\}} = \tfrac{1}{3}\Big(\mathcal{R}^{\ i}_{[jk]l} + \mathcal{R}^{\ i}_{[kl]j} + \mathcal{R}^{\ i}_{[lj]k}\Big) = \tfrac{1}{3}\Big[\tfrac{1}{2}(\mathcal{R}^{\ i}_{jkl} - \mathcal{R}^{\ i}_{kjl}) + \tfrac{1}{2}(\mathcal{R}^{\ i}_{klj} - \mathcal{R}^{\ i}_{lkj}) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\mathcal{R}^{\ i}_{ljk} - \mathcal{R}^{\ i}_{jlk})\Big] = \tfrac{1}{3}\Big(\mathcal{R}^{\ i}_{jkl} + \mathcal{R}^{\ i}_{klj} + \mathcal{R}^{\ i}_{ljk}\Big) = \mathcal{R}^{\ i}_{\{jkl\}}.$$

Эти выкладки показывают, что справедлива

Лемма. *Альтернирование по двум индексам внутри циклирования по трем индексам можно опустить, если по другой паре индексов имеется антисимметрия.*

Циклируем выражение (24) с помощью Леммы:

$$\mathcal{R}^{\ i}_{\{jkl\}} = R^i_{\{jkl\}} - S^i_{m\{j}S^m_{kl\}} + S^m_{\{jk}S^i_{l\}m} - S^i_{\{jkl\}} =$$
$$= R^i_{\{jkl\}} - 2S^i_{m\{j}S^m_{kl\}} - S^i_{\{jkl\}} = -I^{\ i}_{jkl} = 0.$$

Поскольку выполняются тождества

$$\mathcal{R}^{\ i}_{\{[jk]l\}} = \mathcal{R}^{\ i}_{\{jkl\}} = 0,$$

доказана

Теорема 4. *Пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ является полугономным n-мерным гладким многообразием.*

Используя выражения (24) величин $\mathcal{R}^{\ i}_{jkl}$ и дифференциальные соотношения ($7_{1,3}$, 9_1) для компонент тензоров S^i_{jk}, S^i_{jkl} и объекта R^i_{jkl}, получим

$$\Delta\mathcal{R}^{\ i}_{jkl} - \delta^i_j S^m_{kl}\omega_m - S^i_{kl}\omega_j \cong 0\,,$$

откуда следуют сравнения для коэффициентов $\mathcal{R}^{i}_{[jk]l}$ из формулы (26):

$$\Delta\mathcal{R}^{i}_{[jk]l} - (\delta^{i}_{[j}S^{m}_{k]l} + \delta^{m}_{[j}S^{i}_{k]l})\omega_{m} \cong 0.$$

Эти сравнения примут тензорный вид $\Delta\mathcal{R}^{i}_{[jk]l} \cong 0$ лишь в случае

$$\delta^{i}_{[j}S^{m}_{k]l} + \delta^{m}_{[j}S^{i}_{k]l} = 0\,.$$

При $m = l$ получим

$$\delta^{i}_{[j}S^{l}_{k]l} + \delta^{l}_{[j}S^{i}_{k]l} = 0\,.$$

Используя обозначение (16) и антисимметрию компонент тензора кручения S^{i}_{jk}, найдем

$$S^{i}_{jk} = -\delta^{i}_{[j}S_{k]} = -\tfrac{1}{2}(\delta^{i}_{j}S_{k} - \delta^{i}_{k}S_{j})\,,$$

что совместимо с формулой (17), когда

$$S_{k} = 0 \;\Leftrightarrow\; S^{i}_{jk} = 0\,.$$

Теорема 5. *Равенства* $\mathcal{R}^{i}_{[jk]l} = 0$ *инвариантны лишь в пространстве проективной связности без кручения* $P'_{n,n}$ $(S^{i}_{jk} = 0)$, *из которого они выделяют голономное пространство проективной связности* ${}^{H}P'_{n,n}$.

§ 4. Классы пространств проективной связности

Среди пространств проективной связности $P_{n,n}$ главное место занимает пространство без кручения $P'_{n,n}$, в котором тензор кручения обращается в нуль: $S^{i}_{jk} = 0$. Дифференциальные уравнения (7_3) упрощаются

$$\Delta R^{i}_{jkl} = R^{i}_{jklm}\omega^{m}\,. \tag{27}$$

Теорема 6. *В пространстве проективной связности без кручения* $P'_{n,n}$ *тензор проективной кривизны-кручения R вырождается в аналог тензора центропроективной кривизны* $R' = \{R^i_{jkl},\ R_{ijk}\}$, *компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (27, 7_2), причем тензор* R' *содержит аналог тензора аффинной кривизны* R^i_{jkl}.

В случае $S^i_{jk} = 0$ уравнения (7_1) дают $S^i_{jkl} = 0$, поэтому тождества Риччи — Бьянки (8) принимают вид

$$R^i_{\{jkl\}} = 0\,,\ R^i_{j\{klm\}} = -\delta^i_j R_{\{klm\}} - R_{j\{kl}\delta^i_{m\}}\,,\ R_{i\{jkl\}} = 0\,, \qquad (28)$$

а обозначение (24) становится переобозначением $\mathcal{R}^{\,i}_{jkl} = R^i_{jkl}$.

Совокупность коэффициентов в формуле (26) назовем объектом неголономности пространства $P'_{n,n}$, потому что его аннулирование

$$\mathcal{R}^{\,i}_{[jk]l} = R^i_{[jk]l} = 0 \Leftrightarrow \theta^i_{[jk]} = 0$$

характеризует голономное пространство ${}^H P'_{n,n}$.

Если обращается в нуль тензор аффинной кривизны-кручения

$$S^i_{jk} = 0,\ \ R^i_{jkl} = 0\ \Rightarrow\ R^i_{jklm} = 0\,,$$

то упрощаются дифференциальные уравнения (7_2):

$$\Delta R_{ijk} = R_{ijkl}\omega^l\,. \qquad (29)$$

и тождества Бьянки (28_2):

$$\delta^i_j R_{\{klm\}} + R_{j\{kl}\delta^i_{m\}} = 0\,. \qquad (30)$$

Свертывая их по индексам i и j, получим

$$R_{\{klm\}} = 0\,. \qquad (31)$$

Подставим тождества (31) в выражения (30) и раскроем циклирование

$$R_{jkl}\delta^i_m + R_{jlm}\delta^i_k + R_{jmk}\delta^i_l = 0. \tag{32}$$

Положим $i = m$ и приведем подобные

$$(n-2)R_{jkl} = 0. \tag{33}$$

Другие свертки тождеств (33) приводят к тому же. Тождества (33) при $n = 2$ пропадают, а при $n > 2$ дают $R_{jkl} = 0$.

Теорема 7. *В пространстве проективной связности без аффинной кривизны-кручения $P''_{n,n}$, тензор проективной кривизны-кручения R вырождается в тензор R_{ijk}, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (29). При $n > 2$ имеем $R_{ijk} = 0$, поэтому тождества Риччи — Бьянки исчезают, а при $n = 2$ они принимают вид (31, 28$_3$). Наконец, если обращается в нуль тензор проективной кривизны-кручения R:*

$$S^i_{jk} = 0,\ R^i_{jkl} = 0,\ R_{ijk} = 0 \Rightarrow R_{jklm} = 0,$$

то тождества Риччи — Бьянки исчезают и в случае $n = 2$.

Утверждение. *Пространство проективной связности без проективной кривизны-кручения $P'''_{n,n}$ является локально-проективным пространством со структурными уравнениями (5), особым случаем которого служит проективное пространство P_n, в котором эффективно действует проективная группа GP(n) с теми же структурными уравнениями.*

В пространствах $P''_{n,n}$, $P'''_{n,n}$ и P_n формулы (25, 26) имеют вид

$$\theta^i_{jk} = -\delta^i_j\omega_k - \delta^i_k\omega_j,\ \ \theta^i_{[jk]} = 0,$$

т. е. эти пространства являются нетривиальными голономными гладкими многообразиями.

Изобразим рассмотренные классы пространств проективной связности на схеме

$$P_{n,n} \to P'_{n,n} \begin{array}{l} \nearrow {}^{H}P'_{2,2} \to P''_{2,2} \to P'''_{2,2} \to P_2 \\ \searrow {}^{H}P'_{n,n} \to P''_{n,n} = P'''_{n,n} \to P_n \quad (n > 2), \end{array}$$

где стрелка показывает переход к особому случаю предшествующего пространства.

Список литературы

1. *Cartan E.* Lecons sur la théorie des connection projective. P., 1937.

2. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

3. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М., 2003.

4. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геометрического семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

5. *Лумисте Ю. Г.* Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения *p*-реперов // Там же. 1974. Т. 5. С. 239—257.

6. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

Yu. Shevchenko

The classification of spaces of projective connection

The affine curvature-torsion tensor containing torsion tensor is extracted from the projective curvature-torsion tensor in an *n*-dimensional space with Cartan projective connection. It is proved that analogs of Ricci — Bianchi identities are invariant in the space with objective curvature, when torsion tensor is expressed in terms of one-valent tensor. Holonomic and semi-holonomic manifolds are defined by prolonging a smooth manifold structure equations by means of Laptev's lemma. The Ricci — Bianchi identities let to show that the space with projective connection $P_{n,n}$ is semi-holonomic which survive in a torsion-free space $P'_{n,n}$. We introduce tensor of non-holonomicity for the space $P'_{n,n}$, if it vanishes there is holonomic space ${}^{H}P'_{n,n}$. The classification of Cartan projective connections is accomplished.