Используя равенства (6), получим

$$(b+\mu a)(\omega^1)^2-(\mu^2 b+\mu c)(\omega^2)^2+ \tag{36}$$
$$+(c-\mu^2 a)\omega^1\omega^2=0.$$

Сравнивая с формой Ψ (7), получим

$$c-\mu^2 a=0,\quad -\frac{\mu^2 b+\mu c}{b+\mu a}=-\frac{B^2}{A^2}. \tag{37}$$

Исключим μ^2 из второго уравнения (37) и используя значения A^2, B^2 и (18), получим равенство (34). Легко проверить, что если оно выполняется, то есть (γ) сопряжена. В силу равенств (13) имеем

$$\hat{P}_1^{\circ}(\hat{H},\hat{K})=-\frac{1}{2}\frac{\hat{P}_3^{\circ 2}(\hat{H},\hat{K})\cdot\hat{H}}{\hat{P}_2^{\circ}(\hat{H},\hat{K})}, \tag{38}$$

то есть сеть $(\tilde{\gamma})$ на поверхности $\hat{V}_2$ сопряжена и теорема доказана.

Список литературы

1. К а р т а н Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. Изд.-во МГУ, 1962.

2. Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М.-Л., 1948.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

Г.Л.Свешникова, Н.В.Ермакова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции кривых второго порядка (коник) с характеристической точкой F плоскости коники, принадлежащей этой конике. Такие конгруэнции названы конгруэнциями $\mathcal{L}$. Ранее В.В.Рыжков [1] рассматривал в P_3 конгруэнции плоских алгебраических кривых, причем характеристическая точка плоскости коники не лежала на конике. Доказано существование конгруэнций $\mathcal{L}$. Рассмотрен класс конгруэнций $\mathcal{L}$ (конгруэнции $\mathcal{L}_1$), в котором для огибающей поверхности (F) семейства плоскостей коник найдена квадрика Ли Q. Получены характеристическое и фокальное многообразия конгруэнции (Q) квадрик Ли Q.

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta,\quad \alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4,$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры и условию

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0.$$

Поместим вершину A_i $(i,j,\kappa=1,2;\ i\neq j)$ репера R в фокальную точку коники, которая описывает невырождающуюся поверхность, вершину A_3 -в полюс прямой A_1A_2 относительно коники. Нормируем вершины репера так, чтобы точка $E_{12}=A_1+A_2$ прямой A_1A_2 была инцидентна прямой FA_3. Тогда характеристическая точка плоскости коники записывается в виде $F=A_1+A_2-\sqrt{2}A_3$. Пусть ℓ-линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i) в точках A_i. Точка $B_i=\Gamma_i^{3i}A_3+A_4$ -точка пересечения с прямой ℓ, касательной к линии $\omega_j^4=0$ на поверхности (A_i) в точке A_i. Помещаем вершину A_4 репера на прямую ℓ в четвертую гармоническую к точке A_3 относительно точек B_i.

Уравнение коники и система уравнений Пфаффа, определяющая конгруэнцию $\mathcal{L}$, имеют вид:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3\kappa}\omega_\kappa,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{i\kappa}\omega_\kappa,\quad \omega_4^i=\Gamma_4^{i\kappa}\omega_\kappa,\ \omega_4^3=\Gamma_4^{3\kappa}\omega_\kappa,\\ \omega_3^4=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1+\omega_2),\quad \omega_1^1-\omega_3^3=a^\kappa\omega_\kappa,\quad \omega_2^2-\omega_3^3=b^\kappa\omega_\kappa,\end{gathered} \tag{2}$$

причем

$$\begin{gathered}\Gamma_1^{31}+\Gamma_2^{32}=0,\quad \Gamma_4^{ii}+\Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{ii}-\Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{ij}=0,\\ b^1-a^2+\frac{1}{\sqrt{2}}(2\Gamma_1^{31}+2\Gamma_3^{12}-2\Gamma_3^{21}-\Gamma_2^{31}-\Gamma_1^{32})=0,\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\omega_i^4=\omega_i,\quad \omega_1\wedge\omega_2\neq 0.$$

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (2),(3) и

анализируя полученную замкнутую систему, убеждаемся, что конгруэнции $\mathcal{L}$ существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $\mathcal{L}_1$ называется конгруэнция $\mathcal{L}$, обладающая следующими свойствами: 1/ асимптотические линии на поверхностях (A_i) соответствуют фокальным линиям $\omega_1\omega_2=0$; 2/ фокусами луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) являются точки E_{12} и $E_{12}^*=A_1-A_2$; 3/ $\Gamma_3^{12}=\Gamma_3^{21}$, $a^1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Используя в уравнениях (2),(3) условия определения конгруэнции $\mathcal{L}_1$ и осуществляя последнюю нормировку вершин репера в виде:

$$\Gamma_1^{32}=1,$$

получаем для конгруэнции $\mathcal{L}_1$ следующую вполне интегрируемую систему уравнений Пфаффа:

$$\begin{gathered}\omega_i^j=0,\ \omega_i^3=\omega_j,\ \omega_3^i=\beta\omega_j,\ \omega_4^i=\omega_3^j,\ \omega_4^3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1+\omega_2),\\ \omega_3^3=\omega_4^4,\ \omega_i^i=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{a}{2}\right)\omega_i+\frac{1}{2}a\omega_j,\quad \omega_3^3=-\frac{1}{2}a(\omega_1+\omega_2),\\ \omega_4^4=\left(\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\omega_1+\omega_2),\qquad d\beta=da=0,\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\Gamma_3^{12}=\beta,\quad a^2=a.$$

Т е о р е м а. Конгруэнции $\mathcal{L}_1$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1/ торсы прямолинейных конгруэнций (A_3A_4) и (A_1A_2) соответствуют; 2/ фокусы E_{34} и E_{34}^* луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) гармонически делят точки A_3 и A_4; 3/ прямолинейные конгруэнции (A_iA_3) и (A_iA_4)-параболические; 4/ касательные к координатным линиям $\omega_i = 0$ на поверхностях (A_j) пересекаются в точке A_4 ;5/ поверхности $(E^*_{12}), (E_{34})$ вырождаются в линии; 6/точки E_{34} и E^*_{34} являются двойными точками гомографии [2] поверхностей (A_1) и (A_2);7/существует двустороннее расслоение [3] прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4).

Доказательство. 1/Торсы прямолинейных конгруэнций (A_3A_4) и (A_1A_2) определяются одним уравнением $(\omega_1)^2 - (\omega_2)^2 = 0$, значит, они соответствуют, 2/Фокусами луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции являются точки $E_{34} = A_3 + A_4$ и $E^*_{34} = A_3 - A_4$. Действительно, точки A_3, A_4, E_{34} и E^*_{34} образуют гармоническую четверку. 3/Фокусы каждого из лучей A_iA_3 и A_iA_4 прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) и (A_iA_4) совпадают. Сдвоенной фокальной точкой каждого из лучей является точка A_i, значит, эти конгруэнции являются параболическими. 4/Касательные к координатным линиям $\omega_i = 0$ на поверхностях (A_j) в точках A_j пересекают прямую ℓ в точках $B_j = \Gamma^{3j}_j A_3 + A_4$. Для конгруэнций $\mathcal{L}_1$ точки B_j совпадают с точкой A_4. 5/Из формул

$$dE^*_{12} = \omega^1_1 E^*_{12} + (\omega_2 - \omega_1)\left(E^*_{34} + \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)A_2\right),$$

$$dE_{34} = \left(\frac{1}{2}a + \sqrt{2}\right)(\omega_1 + \omega_2)E_{34} + (\omega_1 + \omega_2)\left(\beta E_{12} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + a\right)A_3\right)$$

видно, что поверхности (E^*_{12}) и (E_{34}) вырождаются в линии. 6/Торсы прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) определяются уравнением $(\omega_1)^2 - (\omega_2)^2 = 0$. Касательные к линии $\omega_1 - \omega_2 = 0$ (соответственно, к линии $\omega_1 + \omega_2 = 0$) на поверхностях (A_1) и (A_2) в точках A_1 и A_2 пересекаются в точке E_{34}

(соответственно, в точке E^*_{34}). Эти точки являются двойными точками гомографии поверхностей (A_1) и (A_2). 7/ Условия двустороннего расслоения прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4):

$$\omega^1_4 \wedge \omega^3_1 + \omega^2_4 \wedge \omega^3_2 = 0, \quad \omega^4_1 \wedge \omega^1_3 + \omega^4_2 \wedge \omega^2_3 = 0,$$

$$\omega^1_3 \wedge \omega^3_1 - \omega^2_4 \wedge \omega^4_2 = 0, \quad \omega^2_3 \wedge \omega^3_2 - \omega^1_4 \wedge \omega^4_1 = 0,$$

$$\omega^3_2 \wedge \omega^1_3 + \omega^4_2 \wedge \omega^1_4 = 0, \quad \omega^3_1 \wedge \omega^2_3 + \omega^4_1 \wedge \omega^2_4 = 0$$

тождественно удовлетворяются в силу системы уравнений (4). Теорема доказана.

Для фокальной поверхности (A_i) конгруэнции $\mathcal{L}_1$ найдена квадрика Ли

$$(x^j)^2 - 4\beta x^i x^j + 4\beta^2 x^3 x^4 - 2\sqrt{2}\, x^j (x^3 + x^4) = 0,$$

получено каноническое представление поверхности (A_i):

$$\beta x = yz - \frac{1}{3\sqrt{2}}(y^3 + z^3) - \frac{1}{2}yz(y+z),$$

где

$$x = \frac{x^j}{x^i}, \quad y = \frac{x^3}{x^i}, \quad z = \frac{x^4}{x^i}.$$

Квадрика Ли Q огибающей поверхности (F) семейства плоскостей коник (1) имеет уравнение

$$2\sqrt{2}\, x^3(x^1 + x^2) + 2(x^3)^2 - (x^4)^2 + 4x^1x^2 + 2(1 + \sqrt{2}a - 2\beta)x^3x^4 = 0.$$

Исследована конгруэнция квадрик Ли (Q). Ее характеристическое многообразие состоит из двух кривых второго порядка (5) и (6) :

$$\left.\begin{aligned} &2x^1x^3+(\sqrt{2}a+2)x^1x^4+(a+\sqrt{2})x^3x^4+\frac{\sqrt{2}}{2}(x^3)^2-\\ &\quad-(\sqrt{2}\beta-\frac{a}{2})(x^4)^2+\sqrt{2}(x^1)^2=0,\\ &x^1-x^2=0.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &2x^1x^3+(\sqrt{2}a+2)x^1x^4+(a+\sqrt{2})x^3x^4+\frac{\sqrt{2}}{2}(x^3)^2-\\ &\quad-(\sqrt{2}\beta-\frac{a}{2})(x^4)^2+\sqrt{2}(x^1)^2=0,\\ &x^1+x^2+(a+\sqrt{2})x^4+\sqrt{2}x^3=0.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Фокальное многообразие конгруэнции квадрик Ли (Q) состоит из восьми точек, причем точка F является сдвоенной фокальной точкой.

С конгруэнцией $\mathcal{L}_1$ ассоциируется конгруэнция коник (C_1). Коника C_1 получается при пересечении квадрики Ли плоскостью $x^3=0$, ее уравнение имеет вид:

$$(x^4)^2-4x^1x^2=0,\ x^3=0. \quad (7)$$

Найдены все шесть фокусов коники C_1, четыре из них имеют следующую геометрическую характеристику-это точки A_1, A_2 и точки $\mathcal{D}_1=A_1+A_2+2A_4$, $\mathcal{D}_2=A_1+A_2-2A_4$, которые являются точками пересечения коники (7) и прямой $E_{12}A_4$.

Список литературы

I. Р ы ж к о в В.В. О конгруэнциях плоских алгебраических кривых.-ДАН СССР, I943, т.4I, №5, с.202-204.

2. Ф и н и к о в С.П. Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева."Уч. зап. МГПИ," I956, I6, вып.3.

3. Ф и н и к о в С.П. Теория пар конгруэнций, М., ГИТТЛ, I956.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

Е.В. С к р ы д л о в а

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ КОНИКОЙ И ПРЯМОЙ

В работе [1] рассмотрен наиболее общий тип конгруэнций $(CL)_{1,2}$ -вырожденных конгруэнций [2] пар фигур, порожденных коникой C, описывающей однопараметрическое семейство, и прямой L, описывающей конгруэнцию (L). В настоящей работе, дополняющей предыдущую, в трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается особый тип конгруэнций $(CL)_{1,2}$, в которых образующие элементы C и L пересекаются, не будучи, однако, инцидентными одной и той же плоскости. Конгруэнции $(CL)_{1,2}$ такого типа мы будем обозначать $(CL)^*_{1,2}$. Для конгруэнций $(CL)^*_{1,2}$ построен геометрически фиксированный репер, указаны их некоторые свойства.

§1. Система уравнений конгруэнции $(CL)^*_{1,2}$

В конгруэнциях $(CL)^*_{1,2}$ каждой прямой L конгруэнции (L) ставится в соответствие единственная пересекаемая ею коника C однопараметрического семейства (C), полным прообразом которой является линейчатая поверхность $(L)_C$. Отнесем конгруэнцию $(CL)^*_{1,2}$ к реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$, в котором вершина A_3 совпадает