(16)-(19), определим еще две аффинные связности $\overset{3}{\nabla}$ и $\overset{4}{\nabla}$ соответственно следующими формами (см.[7]):

$$\overset{3}{\nabla}: \quad \omega^p_0, \quad \overset{3}{\theta}{}^p_q = \overset{1}{\theta}{}^p_q + F^p_{qt}\,\omega^t_0, \quad (\Gamma^p_{qu} = F^p_{qu} = 0);$$

$$\overset{4}{\nabla}: \quad \omega^p_0, \quad \overset{4}{\theta}{}^p_q = \overset{1}{\theta}{}^p_q + F^p_{qu}\,\omega^u_0, \quad (\Gamma^p_{qt} = F^p_{qt} = 0).$$

Аналогично [7] доказывается, что аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{3}{\nabla}$ имеют одинаковые кручения, но, вообще говоря, различные тензоры кривизны.

Таким же образом, как это показано выше для базисного распределения $\mathcal{H}_r \subset \mathcal{H}^r_{m,n-1}$, строятся еще восемь аффинных связностей, ассоциированных с трехсоставным распределением $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$.

Эти связности индуцируются двойственными нормализациями $\{\nu^0_\alpha, \nu^\alpha_n\}$ распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$ характеристик $X_{n-m-1}$ гиперплоскостей $\Pi_{n-1}$ и двойственными нормализациями $\{\nu^0_i, \nu^i_n\}$ распределения $\mathcal{H}_{m-r}$ плоскостей $\Pi_{m-r}$ $(\Pi_{m-r} \subset \Pi_m;\ \Pi_{m-r} \cup \Pi_r = \Pi_m)$.

## Список литературы


1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.матем.о-ва, 1953, 2, с.275-382.

2 Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства.-Тр.4-го Всес.матем.съезда (1961), 2, 1964, с.226-233.

3. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., 1950.

4. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия. Rev. math. pures et appl. (RPR), 1962, 7, №2, с.231-240.

5 Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин Г.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева.-Тр.Геометр.семинара. М., ВИНИТИ, 1973, 4, с.7-70.

6 Попов Ю.И. О проективно-дифференциальной геометрии двухсоставного гиперполосного распределения $H^r_{m,n-1}$.-Тезисы докладов 7-й Всес.конф. по совр.проблемам геом. Минск, 1979, с.160.

7 Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения $m$-мерных линейных элементов.-Тр.Геометр.семинара, М., ВИНИТИ, 1975, 7, с.117-151.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.14 1983

УДК 514.75



О.С.Редозубова


# ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПАРЫ T КОНГРУЭНЦИЙ С ЗАДАННЫМ СООТНОШЕНИЕМ АБСЦИСС ФОКУСОВ

Рассмотрим ортогональные пары T конгруэнций в евклидовом пространстве $E_3$, у которых обратно пропорциональны абсциссы соответствующих фокусов.

Фокусы соответствующих прямых пары T конгруэнций обозначим буквами $F_a$, $F'_a$ $(a=1,2)$. Прямые конгруэнции общих перпендикуляров $\{\tau\}$ пересекают соответствующие пары в точках $K_a$. К паре T присоединяется подвижный ортонормированный репер $R=(O,\vec e_i)$, где $O\in\tau$, $\vec e_3 \parallel \tau$, $i=1,2,3$. Прямые $(F_aF'_a)$ образуют с $\vec e_1$ углы $\alpha_a$, угол между соответствующими прямыми равен $\alpha_1-\alpha_2$. Относительно репера $(O,\vec e_3)$ на прямой $\tau$ точки $K_a$ имеют координаты $h_a$; расстояние между соответствующими прямыми равно $|h_1-h_2|$. Направляющими ортами прямых $(F_aF'_a)$ являются векторы $\vec\eta_a = \vec e_1\cos\alpha_a + \vec e_2\sin\alpha_a$. По отношению к реперам $(K_a,\vec\eta_a)$ на прямых $(F_a,F'_a)$ фокусы $F_a$ и $F'_a$ имеют соответственно координаты $\rho_a$ и $\rho'_a$. Компоненты инфинитезимальных перемещений репера $R$ удовлетворяют условиям: $d\vec O = \omega^i\vec e_i$, $d\vec e_i = \omega^j_i\vec e_j$. Пары T конгруэнций могут быть общими и специальными в соответствии с работой I, с.3.

Рассмотрим ортогональные пары T конгруэнций, у которых абсциссы фокусов удовлетворяют условию $\rho_1\rho'_1 = \rho_2\rho'_2$. Будем обозначать такие пары через $\hat T$. В этом случае абсциссы соответствующих фокусов обратно пропорциональны: $\rho_1 : \rho_2 = \rho'_2 : \rho'_1$.

I. Допустим сначала, что пары T конгруэнций общего вида (когда $\rho = \rho'_1\rho_2 - \rho_1\rho'_2 \neq 0$). Такие пары определяются системой (3) в работе [1]. Присоединим к системе (3) условие ортогональности пары $T$ конгруэнций $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ и условие $\rho_1 \rho_1' = \rho_2 \rho_2'$. Используем обозначения, принятые в работе [1].

$$\Omega_{a3} = \omega_1^3 \cos\alpha_a + \omega_2^3 \sin\alpha_a, \quad \Omega^*_{a3} = -\omega_1^3 \sin\alpha_a + \omega_2^3 \cos\alpha_a,$$

$$\Omega^*_a = \omega^1 \sin\alpha_a - \omega^2 \cos\alpha_a, \quad A_a = \omega_1^2 + d\alpha_a, \tag{1}$$

$$H_a = \frac{\omega^3 + dh_a}{h_1 - h_2}, \quad Q_a = \Omega^*_a + h_a \Omega^*_{a3}, \quad (a = 1, 2).$$

Кроме того, обозначим $\rho_1 \rho_1' = \rho_2 \rho_2' = m, \ \frac{1}{\rho} \cdot (\rho_a - \rho_a') = \tau_a$. (2)

Т е о р е м а 1. Ортогональные пары $\hat{T}$ конгруэнций в общем случае существуют с произволом четырех функций одного аргумента, если $\tau_1 \neq \tau_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений, определяющая ортогональные пары $\hat{T}$ в общем случае, имеет вид:

$$A_1 = -\Omega_{13} \frac{m\tau_1}{h_1 - h_2} + Q_1 \tau_2, \quad A_2 = \Omega_{23} \frac{m\tau_2}{h_1 - h_2} - Q_2 \tau_1,$$

$$H_1 = -\Omega_{13} \frac{m\tau_2}{h_1 - h_2} + Q_1 \tau_1, \quad H_2 = \Omega_{23} \frac{m\tau_1}{h_1 - h_2} - Q_2 \tau_1, \tag{3}$$

$$A_1 = A_2 \equiv A, \quad \rho_1 \rho_1' = \rho_2 \rho_2' = m.$$

Отсюда получим систему уравнений:

$$A = -\Omega_{13} \frac{m\tau_1}{h_1 - h_2} + Q_1 \tau_2, \quad H_1 = -\Omega_{13} \frac{m\tau_2}{h_1 - h_2} + Q_1 \tau_1,$$

$$Q_2 = -Q_1 \frac{\tau_2}{\tau_1} + \Omega_{13} \frac{m}{h_1 - h_2} + \Omega_{23} \frac{m\tau_2}{\tau_1 (h_1 - h_2)}, \tag{4}$$

$$H_2 = -\Omega_{13} \frac{m\tau_2}{h_1 - h_2} + \Omega_{23} \frac{m(\tau_1^2 - \tau_2^2)}{\tau_1 (h_1 - h_2)} + Q_1 \frac{\tau_2^2}{\tau_1}, \quad A_1 = A_2 \equiv A.$$

При продолжении системы уравнений (4) получим четыре независимых квадратичных уравнения с линейно независимыми формами $\Omega_{a3}$ $(a = 1, 2)$ и неизвестными формами $Q_1$, $dm, d\tau_1, d\tau_2$. Отсюда и следует заключение теоремы.

Т е о р е м а 2. Ортогональные пары $\hat{T}$ конгруэнций общего вида с соответственно равными фокальными расстояниями соответствующих прямых существуют с произволом трех функций одного аргумента.



Д о к а з а т е л ь с т в о. Присоединяя условие $\tau_1 = \tau_2$ к системе уравнений (4), получим, в частности, что $H_1 = H_2 = H$. Исследование такой системы приводит к выводу о том, что независимых три квадратичных уравнения, неизвестных форм – тоже три: $Q_1$, $dm$, $d\tau_1$. Следовательно, произвол существования таких пар – три функции одного аргумента.

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы ортогональные пары $\hat{T}$ конгруэнций общего вида имели соответственно равные фокальные расстояния, необходимо и достаточно, чтобы пары были равнонаклонными парами II-го типа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если у ортогональных пар $\hat{T}$ конгруэнций общего вида равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, то из условий $\tau_1 = \tau_2$ и $\rho_1 \rho_1' = \rho_2 \rho_2'$ следует, что $\rho_1' = -\rho_2, \rho_2' = -\rho_1$, что определяет пары II-го типа. Если ортогональные пары $\hat{T}$ есть пары II-го типа, то у них равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых [1, с. 15]. Теорема доказана.

У таких пар равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых дополнительных конгруэнций, углы между фокальными плоскостями, проходящими через эти прямые, а также углы между фокальными плоскостями соответствующих прямых пары [1, с. 15].

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы у ортогональных пар $\hat{T}$ конгруэнций общего вида были равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, необходимо, но не достаточно, чтобы расстояния между соответствующими прямыми были постоянными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если у ортогональных пар $\hat{T}$ конгруэнций равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, то $\tau_1 = \tau_2$ и из системы (4) имеем $H_1 = H_2$, откуда в силу обозначений (1) следует, что $h_1 - h_2 = const$. Значит, постоянство расстояния между соответствующими прямыми является необходимым.

Предположим, что у ортогональных пар $\hat{T}$ конгруэнций постоянно расстояние между парами соответствующих прямых, т.е. $H_1=H_2\equiv H$. Присоединяя его к системе (4) и сравнивая выражения $Q_1$ из второго и четвертого уравнений, получим:

$$(\tau_2^2-\tau_1^2)\{H(h_1-h_2)+\Omega_{13}m\tau_2-\Omega_{23}m\tau_1\}=0. \qquad (5)$$

Здесь две возможности: а/ $\tau_1=\tau_2$, (6)

$$б/\ H=-\Omega_{13}\frac{m\tau_2}{h_1-h_2}+\Omega_{23}\frac{m\tau_1}{h_1-h_2}. \qquad (7)$$

В случае а/ равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, а в случае б/ пары не обладают таким свойством.

Т е о р е м а 5. Ортогональные пары $\hat{T}$ конгруэнций общего вида с постоянным расстоянием между соответствующими прямыми либо являются парами II-го типа, либо соответствующие прямые лежат перекрестно в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров, либо являются нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (6) и теоремы 3 следует, что пары II-го типа. Условие (7), присоединенное к системе (4), приводит к парам $\tilde{T}$ с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми. В силу теоремы 20 в [1] имеет место вторая часть теоремы 5. Для такой пары конгруэнция общих перпендикуляров является псевдосферической, а пары симметричны и расслояемы.

Т е о р е м а 6. Для того, чтобы у ортогональной пары $\hat{T}$ конгруэнции, входящие в пару, были нормальными, необходимо и достаточно, чтобы расстояние между соответствующими прямыми и произведение абсцисс фокусов каждой из конгруэнций пары были постоянными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие нормальности конгруэнций ортогональной пары $T$ имеет вид:

$$\rho_a\rho_a' + (h_1-h_2)^2=0. \qquad (8)$$

Отсюда следует, что $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'$ и пара $T$ есть пара $\hat{T}$. Система уравнений (4), (8) определяет такие пары.



По теореме 28 в [1] у такой пары постоянно расстояние между соответствующими прямыми. Из условия (8) постоянно и произведение $\rho_1\rho_1'$. Обратно, если пара $\hat{T}$ конгруэнций ортогональная $\rho_1\rho_1'=m=const$ и $h_1-h_2=const$, то такие пары определяются системой уравнений (4) и $H_1=H_2\equiv H$. Систему можно привести к виду:

$$A=-\Omega_{13}\frac{m\tau_1}{h_1-h_2}+\Omega_{23}\frac{m\tau_2}{h_1-h_2}, \quad H=-\Omega_{13}\frac{m\tau_2}{h_1-h_2}+\Omega_{23}\frac{m\tau_1}{h_1-h_2},$$
$$Q_1=\Omega_{23}\frac{m}{h_1-h_2}, \quad Q_2=\Omega_{13}\frac{m}{h_1-h_2}, \quad m=const. \qquad (9)$$

Дифференцируя уравнения внешним образом и подставляя выражения $A, H$ и $Q_1, Q_2$ из (9), получим четыре квадратичных уравнения, два последние из которых имеют вид:

$$(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\left\{\frac{m}{h_1-h_2}+h_1-h_2\right\}=0, \quad (\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\left\{\frac{m}{h_1-h_2}+h_1-h_2\right\}=0. \qquad (10)$$

Отсюда $\quad m+(h_1-h_2)^2=0.$

Следовательно, конгруэнции пары $\hat{T}$ нормальные. Произвол существования таких пар - две функции одного аргумента.

II. Допустим, что ортогональные пары $\hat{T}$ конгруэнций специального вида. К системе уравнений (2) в [1] надо присоединить уравнения:

$$A_1=A_2\equiv A, \quad \rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2', \quad \rho=\rho_1'\rho_2-\rho_1\rho_2'. \qquad (11)$$

Т е о р е м а 7. Ортогональные пары $\hat{T}$ конгруэнций специального вида являются равнонаклонными парами I-го типа и существуют с произволом девяти произвольных постоянных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из последних двух уравнений (11) следует, что $\rho_1=\rho_2$, $\rho_1'=\rho_2'$, что определяет пары I-го типа [1, с.12]. Произвол существования таких пар - девять постоянных. Ортогональные пары I-го типа являются симметричными, для них характерно, что прямые конгруэнции общих перпендикуляров пар дополнительных конгруэнций пересекают соответствующие прямые в центрах.

Список литературы

1. Редозубова О.С. Основы метрической теории пар T конгруэнций. - Деп. ВИНИТИ 14.07.1980г., М., №2993-"Деп.рук." 1980, №11, б/о 189.

6 Зак. 14041