O. Omelyan

ON THE CONNECTION OF THE 1-ST TYPE,
INDUCED ON FAMILY OF CENTERED PLANES,
GENERALIZING THE SURFACE

By Laptev — Lumiste's way we give the associated connection in bundle, associated with family of centered planes, generalizing the surface. The composite clothing of family is produced and it is proved, that the clothing induces the connection of the 1-st type in principal bundle.

УДК 514.75

Е. А. Петрова

(Алтайский государственный университет, г. Барнаул)

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РИБОКУРА

Изучается конгруэнция сфер. Рассматривается случай, когда поверхность центров является цилиндром. По известной поверхности центров строится функция радиусов так, чтобы конгруэнция сфер была рибокуровой.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим двухпараметрическое семейство сфер — конгруэнцию сфер [1, с. 459]. Пусть M — гладкая поверхность, описываемая центрами сфер. Определим огибающую поверхность конгруэнции сфер. Обозначим через $r(p)$ радиус-вектор точки p на M, через $r^*(p)$ — радиус-вектор точки огибающей M^*. Тогда имеем

$$r^* = r + \rho \cdot n^*,$$

где $n^*(p)$ — единичный вектор, направленный из центра сферы в соответствующую точку огибающей $r^*(p)$, $\rho(p)$ — радиус соответствующей сферы. Очевидно, что $n^*(p)$ — орт нормали к огибающей поверхности M^*. Разложим вектор $n^*(p)$ на касательную U и нормальную $\varepsilon \cdot n$ составляющие

$$n^* = U + \varepsilon \cdot n .$$

Имеем

$$1 = \langle U,U \rangle + \varepsilon^2 .$$

Если $1 - \langle U,U \rangle > 0$, то определены две нормали

$$n^* = U + \varepsilon \cdot n , \ \bar{n}^* = U - \varepsilon \cdot n ,$$

где $\varepsilon = \sqrt{1 - \langle U,U \rangle}$, и две поверхности M^* и $\overline{M}^*$, где

$$r^* = r + \rho \cdot n^* , \ \bar{r}^* = r + \rho \cdot \bar{n}^*$$

— радиус-векторы соответствующих точек огибающей.

Обозначим через $p^k = \langle U, r_k \rangle$. Тогда имеет место равенство [1, с. 459]:

$$\partial_i \rho = -p^k \cdot g_{ki} ,$$

где g_{ki} — метрический тензор поверхности M .

Отображение $\varphi : M^* \to \overline{M}^*$ называется преобразованием Рибокура [1, с. 469], если линии кривизны M^* переходят в линии кривизны $\overline{M}^*$, т.е. торсы конгруэнций нормалей к поверхностям M^* и $\overline{M}^*$ соответствуют. В этом случае конгруэнция сфер называется рибокуровой.

Имеет место [1, с. 469]

Теорема Дюпена. *Если торсам конгруэнции нормалей огибающей поверхности* M^* *(или* $\overline{M}^*$*) соответствует со-*

пряженная сеть линий на поверхности M, то конгруэнция сфер рибокурова.

Будем считать, что $\langle n^*, n\rangle \neq 0$. Рассмотрим форму

$$\omega_i = \frac{\langle n_i^*, n\rangle}{\langle n^*, n\rangle}.$$

Торсам конгруэнции нормалей огибающей поверхности M^* соответствует сопряженная сеть линий на поверхности *M*, если форма $\omega(\omega_i)$ замкнута [1, с. 469; 2], т.е. выполняется равенство

$$\partial_j \omega_i = \partial_i \omega_j. \tag{1}$$

Значит, каждому решению дифференциального уравнения (1) соответствует рибокурова конгруэнция сфер.

Построим рибокурову конгруэнцию сфер, когда поверхность центров есть цилиндр. Имеем

$$n^* = p^k \cdot r_k + \varepsilon \cdot n,$$
$$n_i^* = \left(\nabla_i p^k - \varepsilon \cdot A_i^k\right) \cdot r_k + \left(b_{si} \cdot p^s + \partial_i \varepsilon\right) \cdot n,$$

где ∇_i — ковариантная производная в метрике g_{ki}, $A\left(A_i^k\right)$ — оператор Вейнгартена поверхности центров *M*, $b(b_{si})$ — ее вторая фундаментальная форма. Тогда

$$\omega_i = \frac{b_{si} \cdot p^s + \partial_i \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Поверхность *M* является цилиндром:

$$r\left(u^1, u^2\right) = \left(\cos u^1, \sin u^1, u^2\right).$$

Тогда

$$\left(b_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\omega_1=\frac{-\partial_1\rho+\partial_1\sqrt{1-(\partial_1\rho)^2-(\partial_2\rho)^2}}{\sqrt{1-(\partial_1\rho)^2-(\partial_2\rho)^2}},$$

$$\omega_2=\frac{\partial_2\sqrt{1-(\partial_1\rho)^2-(\partial_2\rho)^2}}{\sqrt{1-(\partial_1\rho)^2-(\partial_2\rho)^2}}.$$

Дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial_1\rho\cdot\partial_2\rho\cdot\partial_2\partial_2\rho+\partial_2\partial_1\rho-(\partial_2\rho)^2\cdot\partial_2\partial_1\rho}{\left(1-(\partial_1\rho)^2-(\partial_2\rho)^2\right)^{3/2}}=0.$$

Его решением является функция $\rho(u^1,u^2)=f(u^2)$ одной переменной u^2, где $\left|f'(u^2)\right|\le 1$. В этом случае радиус-вектор точки M^* запишется в виде

$$r^*(u^1,u^2)=\begin{pmatrix}\cos u^1\cdot\left(1+f(u^2)\cdot\sqrt{1-\left(f'(u^2)\right)}\right)\\ \sin u^1\cdot\left(1+f(u^2)\cdot\sqrt{1-\left(f'(u^2)\right)}\right)\\ u^2-f(u^2)\cdot f'(u^2)\end{pmatrix},$$

а радиус-вектор точки $\overline{M}^*$ — в виде

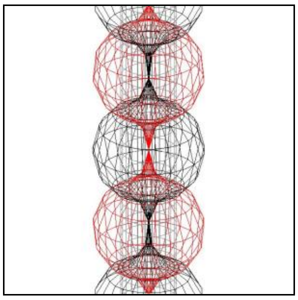
$$\bar{r}^*(u^1,u^2)=\begin{pmatrix}\cos u^1\cdot\left(1-f(u^2)\cdot\sqrt{1-\left(f'(u^2)\right)}\right)\\ \sin u^1\cdot\left(1-f(u^2)\cdot\sqrt{1-\left(f'(u^2)\right)}\right)\\ u^2+f(u^2)\cdot f'(u^2)\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. $f(u^2) = cosu^2$.

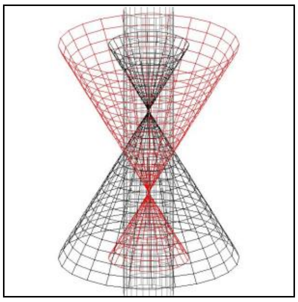
$$r^*(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} cosu^1 \cdot \left(1 + cosu^2 \cdot \left|cosu^2\right|\right) \\ sinu^1 \cdot \left(1 + cosu^2 \cdot \left|cosu^2\right|\right) \\ u^2 + cosu^2 \cdot sinu^2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{r}^*(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} cosu^1 \cdot \left(1 - cosu^2 \cdot \left|cosu^2\right|\right) \\ sinu^1 \cdot \left(1 - cosu^2 \cdot \left|cosu^2\right|\right) \\ u^2 - cosu^2 \cdot sinu^2 \end{pmatrix}.$$



2. $f(u^2) = \dfrac{u^2}{2}$.

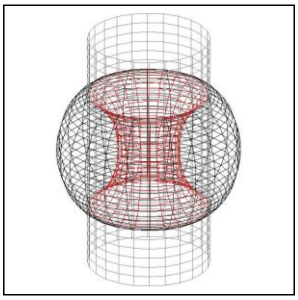
$$r^*(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} cosu^1 \cdot \left(1 + \dfrac{u^2\sqrt{2}}{4}\right) \\ sinu^1 \cdot \left(1 + \dfrac{u^2\sqrt{2}}{4}\right) \\ \dfrac{3u^2}{4} \end{pmatrix}, \quad \bar{r}^*(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} cosu^1 \cdot \left(1 - \dfrac{u^2\sqrt{2}}{4}\right) \\ sinu^1 \cdot \left(1 - \dfrac{u^2\sqrt{2}}{4}\right) \\ \dfrac{5u^2}{4} \end{pmatrix},$$



3. $f(u^2) = \dfrac{(u^2)^2}{2} - u^2$

$$r^*(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} \cos u^1 \cdot \left(1 + \left(\dfrac{(u^2)^2}{2} - u^2\right) \cdot \sqrt{u^2 - 1}\right) \\ \sin u^1 \cdot \left(1 + \left(\dfrac{(u^2)^2}{2} - u^2\right) \cdot \sqrt{u^2 - 1}\right) \\ -\dfrac{(u^2)^3}{2} + \dfrac{3(u^2)^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$\bar{r}^*(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} \cos u^1 \cdot \left(1 - \left(\dfrac{(u^2)^2}{2} - u^2\right) \cdot \sqrt{u^2 - 1}\right) \\ \sin u^1 \cdot \left(1 - \left(\dfrac{(u^2)^2}{2} - u^2\right) \cdot \sqrt{u^2 - 1}\right) \\ \dfrac{(u^2)^3}{2} - \dfrac{3(u^2)^2}{2} + 2u^2 \end{pmatrix},$$



Список литературы

1. *Шуликовский В. И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., 1963.
2. *Чешкова М. А.* О конгруэнции прямых // Изв. АГУ. 2008. С. 38—39.

E. Petrova

ABOUT ONE SPECIAL CASE OF RIBAUCOUR TRANSFORMATION

A sphere congruence is studied. A case when surface of centers is cylinder, is considered. A function of radius is constructed in such a way that a sphere congruence would be a Ribaucour congruence.

УДК 514.76

К. В. Полякова

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ОБОБЩЕНИЕ ДЕРИВАЦИОННЫХ ФОРМУЛ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрено обобщение деривационных формул проективного пространства. Получены деривационные