I.B. B a r s k y

INVESTIGATION OF NETS ON TWO-DIMENSIONAL SURFACE IN THE FOUR-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

The author introduces definitions of vectors of the 1-st and of the 2-nd normal curvature and of the corresponding indicatrices and of the adjoinned curve is investigated. On this base theorems are proved: about necessary and sufficient conditions of the existence of the conjugate net, about the orthogonal net with respect to the normal, perpendicular to the vector of the mean curvature and about the bisector net.

УДК 514.75

НОРМАЛИЗАЦИИ НОРДЕНА - ЧАКМАЗЯНА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСОЙ $H_r(L)$ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

С. Ю. В о л к о в а

(Калининградское ВВМУ)

В работе рассматривается специальный класс регулярных гиперполос $H_r(L) \subset P_n$, оснащенных касательными m-мерными плоскостями (n-1>m>r). Приведено задание гиперполосы $H_r(L)$ в репере 1-го порядка и доказана теорема существования. Найдены поля оснащающих объектов, которые определяют инвариантным образом нормализации Нордена-Чакмазяна гиперполосы $H_r(L)$ [1], [2], и ассоциированных с ней **L**-распределения и **F**-распределеня. Построены охваты оснащающих объектов в дифференциальных окрестностях 1-го, 2-го и 3-го порядков образующего элемента гиперполосы $H_r(L)$, которые позволяют внутренним инвариантным образом присоединить к гиперполосе $H_r(L)$, **L**-распределению и **F**-распределнию поля нормалей 1-го и 2-го рода в смысле Нордена-Чакмазяна. В дифференциальной окрестности 3-го порядка внутренним инвариантным образом присоединены к гиперполосе $H_r(L)$ ее точечный $\{M_I\}$ и тангенциальный $\{\tau^K\}$ реперы.

В работе придерживаемся следующей схемы индексов:

$$I,J,K\ldots=\overline{1,n}\,;\ p,q,r,s,t\ldots=\overline{1,r}\,;\ i,j,k,l\ldots=\overline{r+1,m}\,;\ \alpha,\beta,\gamma\ldots=\overline{m+1,n-1}.$$

Символ “$\equiv$” означает сравнение по модулю базисных форм ω^p (или ω^n_p).

§1. Задание регулярной гиперполосы $H_r(L) \subset P_n$

Рассмотрим частный класс , (Λ, L)-распределения проективного пространства P_n, когда его базисное распределение H_r голономно. Как известно [3], в этом случае проективное пространство P_n расслаивается на (n-r)-параметрическое семейство регулярных r-мерных гиперполос H_r, оснащенных полем касательных m-мерных плоскостей $M \overset{def}{=} \Pi_m$ (n-1>m>r) таких, что в каждой точке **A** базисной поверхности V_r гиперполосы H_r выполняются соотношения:

$$\Lambda(A) \equiv T_r(A) \subset M(A)\,,\ M(A) \subset H(A). \qquad (1.1)$$

В силу условий (1.1) в каждой точке $A \in V_r$ оснащающая плоскость $M(A)$ и характеристика $\chi_{n-r-1}(A)$ гиперполосы H_r пересекаются по плоскости $L(A)$ размерности l=m-r :

$$M(A) \cap \chi_{n-r-1}(A) = L(A). \qquad (1.2)$$

Таким образом, голономность базисного распределения $_r$ (Λ-распределение) данного скомпонованного распределения (Λ, L) можно интерпретировать следующим образом : проективное пространство P_n расслаивается на (n-r)-параметрическое семейство регулярных гиперполос H_r, оснащенных полем **L**-плоскостей таких, что

$$A \in L(A)\,,\ L(A) \subset \chi_{n-r-1}(A). \qquad (1.3)$$

Рассмотрим одну из таких регулярных гиперполос $H_r \subset P_n$, для которой выполняются условия (1.1)-(1.3). Кратко такие гиперполосы будем обозначать $H_r(L)$. Выберем точечный репер $\{A_K\}$ проективного пространства, ассоциированного с гиперполосой $H_r(L)$, следующим образом. Точку A_o репера $\{A_K\}$ совместим с текущей точкой $A \in V_r$, т.е. $A_o \equiv A$; точки $\{A_p\}$ поместим в плоскость $T_r \equiv \Lambda(A_o)$, точки $\{A_i\}$ - в плоскость $L(A_o)$, точки $\{A_\alpha\}$ - в характеристику $\chi_{n-r-1}(A_o)$ гиперполосы $H_r(L)$. Точку A_n выбираем произвольным образом, но так, чтобы она со всеми остальными точками $\{A_o, A_p, A_i, A_\alpha\}$ образовывала репер $\{A_K\}$ проективного пространства P_n. Выбранный таким образом репер $\{A_K\}$ является репером первого порядка R^1 гиперполосы $H_r(L)$. Относительно репера R^1 гиперполоса $H_r(L)$ задается уравнениями:

$$\begin{cases}\omega_o^n = 0\,,\ \omega_o^i = 0\,,\ \omega_o^\alpha = 0\,,\ \omega_i^n = 0\,,\ \omega_\alpha^n = 0\,,\\ \omega_p^n = b_{pq}^n\omega^q\,,\ \omega_p^\alpha = b_{pq}^\alpha\omega^q\,,\ \omega_p^i = b_{pq}^i\omega^q\,,\ \omega_i^\alpha = L_{iq}^\alpha\omega^q,\\ \omega_i^p = L_{iq}^p\omega^q = L_i^{pq}\omega_q^n\,,\ \omega_\alpha^p = N_{\alpha q}^p\omega^q = N_\alpha^{pq}\omega_q^n\,,\end{cases} \quad (1.4)$$

причем

$$\begin{cases}L_{i[q}^p b_{t]p}^n = 0\,,\ N_{\alpha[q}^p b_{t]p}^n = 0\,,\\ b_{pt}^n\cdot b_n^{qt} = \delta_p^q\,,\ L_i^{pq} = L_{it}^p b_n^{tq}\,,\ N_\alpha^{pq} = N_{\alpha t}^p\cdot b_n^{tq}.\end{cases} \quad (1.5)$$

где функции b_{pq}^n, b_{pq}^α, b_{pq}^i, L_{iq}^p, $N_{\alpha q}^p$, L_i^{pq}, N_α^{pq} симметричны по индексам p, q. Совокупность величин Γ_2={ b_{pq}^n, b_{pq}^α, b_{pq}^i, L_{iq}^α, L_{iq}^p, $N_{\alpha q}^p$} образует фундаментальный геометрический объект второго порядка гиперполосы $H_r(L)$, компоненты $N_{\alpha q}^p$ которого являются величинами второго порядка, а остальные - первого порядка.

Компоненты геометрического объекта Γ_2 удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases}\nabla b_{pq}^n + b_{pq}^n\left(\omega_o^o + \omega_n^n\right) = b_{pqt}^n\omega^t,\\ \nabla b_{pq}^\alpha + b_{pq}^\alpha\omega_o^o + b_{pq}^n\omega_n^\alpha = b_{pqt}^\alpha\omega^t,\\ \nabla b_{pq}^i + b_{pq}^i\omega_o^o + b_{pq}^n\omega_n^i + b_{pq}^\alpha\omega_\alpha^i = b_{pqt}^i\omega^t,\\ \nabla L_{iq}^\alpha + L_{iq}^\alpha\omega_o^o = \tilde{L}_{iqt}^\alpha\omega^t,\\ \nabla L_{iq}^p + L_{iq}^p\omega_o^o - \omega_i^o\delta_q^p = L_{iqt}^p\omega^t,\\ \nabla N_{\alpha q}^p + N_{\alpha q}^p\omega_o^o - L_{iq}^p\omega_\alpha^i - \omega_\alpha^o\delta_q^p = N_{\alpha qt}^p\omega_o^t,\end{cases} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{cases}b_{t[p}^i L_{|i|q]}^\alpha = 0\,,\ \tilde{L}_{i[qt]}^\alpha = L_{i[q}^p b_{t]p}^\alpha\,,\\ L_i^{\alpha[q}N_\alpha^{p]t} \equiv 0\,,\ L_{i[q}^\alpha N_{|\alpha|t]}^p = 0,\end{cases} \quad (1.7)$$

а величины b_{pqt}^n, b_{pqt}^α, b_{pqt}^i, L_{iqt}^p, $L_i^{pqt} = L_{isf}^p b_n^{sq} b_n^{ft}$, $N_{\alpha qt}^p$, $N_\alpha^{pqt} = N_{\alpha sf}^p b_n^{sq} b_n^{ft}$ симметричны по индексам p, q, t. Имеет место теорема существования.

Теорема 1. *В n-мерном проективном пространстве* P_n *касательно m-оснащенная регулярная гиперполоса* $H_r(L)$ *существует с произволом 2(n-r-1)+(n-m-1)(m-r)+1 функций r аргументов.*

§2. Условия инвариантности нормализаций Нордена - Чакмазяна гиперполосы $H_r(L)$ и ассоциированных с ней распределений

1. Поля внутренних инвариантных нормалей 1-го рода $N_{n-r} = \left[\sigma^p\right] = \left[\tau^p + y^p \tau^n\right]$ и нормалей 2-го рода ${}_{m-1} = \left[M_p\right] = \left[A_p + x_p A_o\right]$ гиперполосы $H_r(L)$ в смысле Нордена-Чакмазяна определяются соответственно дифференциальными уравнениями [1] :

$$\nabla y^p - y^p \omega_n^n - \omega_n^p \equiv 0, \tag{2.1}$$

$$\nabla x_p + x_p \omega_o^o + \omega_p^o \equiv 0. \tag{2.2}$$

2. Из условия инвариантности плоскости $K_{l-1}(A_o) = \left[M_i\right] = \left[A_i + x_i A_o\right]$:

$$\delta M_i = \theta_i^j M_j \tag{2.3}$$

следует

$$\nabla_\delta x_i + x_i \pi_o^o + \pi_i^o = 0.$$

Таким образом, поле квазитензора $\left\{x_i\right\}$, определяемое уравнениями

$$\nabla x_i + x_i \omega_o^o + \omega_i^o \equiv 0, \tag{2.4}$$

задает поле инвариантных плоскостей K_{l-1}. В каждой точке $A_o \in V_m$ выполняются соотношения

$$K_{l-1}(A_o) \subset L(A_o)\,,\ A_o \notin K_{l-1}(A_o),$$

поэтому поле плоскостей K_{l-1} можно интерпретировать как поле нормалей 2-го рода **L**-распределения (распределения **L**-плоскостей), ассоциированного с гиперполосой $H_r(L)$. Поле нормалей 1-го рода ${}_{n-1} = \left[\sigma^i\right] = \left[\tau^i + y^i \tau^n - x_\alpha^i \tau^\alpha\right]$ распределения **L**-плоскостей определяется дифференциальными уравнениями

$$\nabla y^i - y^i \omega_n^n + x_\alpha^i \omega_n^\alpha - \omega_n^i \equiv 0, \tag{2.5}$$

$$\nabla x_\alpha^i + \omega_\alpha^i \equiv 0. \tag{2.6}$$

3. Для оснащающего **M**-распределения нормализацию Нордена-Чакмазяна введем следующим образом. В каждой точке $A_o \in V_m$ для плоскости $M(A_o)$ определим нормаль 1-го рода $N_{n-m}(A_o) = N_{n-r}(A_o) \cap \ (A_o)$ и нормаль 2-го рода $M_{m-1}(A_o) = \left[\ {}_{m-1}(A_o), K_{l-1}(A_o)\right]$.

4. Рассмотрим в каждой точке $A_o \in V_m$ плоскость $F_{n-m-1}(A_o) = N_{n-m}(A_o) \cap \chi_{n-r-1}(A_o)$. Распределение плоскостей F_{n-m-1}, ассоциированных с гиперполосой $H_r(L)$, назовем **F**-распределением. Для **F**-

распределения также введем нормализацию в смысле Нордена-Чакмазяна. Плоскости

$$_{m+1}\left(A_o\right)=\left[\sigma^\alpha\right]=\left[\tau^\alpha+y^\alpha\tau^n\right],$$

$$F_{n-m-2}\left(A_o\right)=\left[M_\alpha\right]=\left[A_\alpha+x^i_\alpha A_i+x_\alpha A_o\right]$$

назовем соответственно нормалями 1-го и 2-го рода в смысле Нордена-Чакмазяна образующего элемента $F_{n-m-1}\left(A_o\right)$ данного **F**-распределения.

Из условий инвариантности плоскостей $_{m+1}$ и F_{n-m-2} вытекает, что дифференциальные уравнения

$$\nabla y^\alpha-y^\alpha\omega^n_n-\omega^\alpha_n\equiv 0 \qquad (2.7)$$

задают поле нормалей 1-го рода, а дифференциальные уравнения

$$\nabla x_\alpha+x_\alpha\omega^o_o+x^i_\alpha\omega^o_i+\omega^o_\alpha\equiv 0 \qquad (2.8)$$

совместно с уравнениями (2.6) задают поле нормалей 2-го рода **F**-распределения.

5. Наконец, рассмотрим точку

$$M_n=A_n-y^\alpha A_\alpha-\left(y^i+x^i_\alpha y^\alpha\right)A_i-y^p A_p+xA_o$$

и гиперплоскость

$$\sigma^o=\tau^o-x_p\tau^p-x_i\tau^i-\left(x_\alpha-x^i_\alpha x_i\right)\tau^\alpha+y\tau^n.$$

Точка M_n принадлежит гиперплоскостям σ^p, σ^i, σ^α и определяет вместе с точками $A_o\equiv M_o$ и M_α инвариантную нормаль $N_{n-m}\left(A_o\right)=\left[M_o,M_\alpha,M_n\right]$ 1-го рода оснащающей плоскости $M\left(A_o\right)$.

Гиперплоскость $\sigma^o=\left[M_p,M_i,M_\alpha,M_n\right]$ вместе с гиперплоскостями $\tau^n=\sigma^n$ и σ^α определяет инвариантную нормаль 2-го рода $M_{m-1}\left(A_o\right)=\left[\sigma^o,\sigma^\alpha,\sigma^n\right]$ оснащающей плоскости $M\left(A_o\right)$. Отметим, что нормали 1-го и 2-го рода гиперполосы $H_r\left(L\right)$ относительно нового репера можно задать следующим образом :

$$N_{n-r}\left(A_o\right)=\left[M_o,M_i,M_\alpha,M_n\right],\quad {}_{r-1}\left(A_o\right)=\left[\sigma^o,\sigma^i,\sigma^\alpha,\sigma^n\right].$$

Условие инцидентности точки M_n и гиперплоскости $\left(M_n,\sigma^o\right)=0$ приводит к соотношению

$$x+y+x_p y^p+x_i y^i+x_\alpha y^\alpha=0, \qquad (2.9)$$

а условия инвариантности точки M_n и гиперплоскости σ^o имеют соответственно вид

$$\delta x=x\left(\pi^n_n-\pi^o_o\right)+y^p\pi^o_p+\left(y^i+x^i_\alpha y^\alpha\right)\pi^o_i+y^\alpha\pi^o_\alpha-\pi^o_n, \qquad (2.10)$$

$$\delta y=y\left(\pi^n_n-\pi^o_o\right)-x_i\pi^i_n-x_p\pi^p_n-\left(x_\alpha-x^i_\alpha x_i\right)\pi^\alpha_n+\pi^o_n. \qquad (2.11)$$

Уравнения (2.1), (2.2), (2.4)-(2.8), (2.10), (2.11) показывают, что величины

$$\left\{y^p\right\},\ \left\{x_p\right\},\ \left\{x_i\right\},\ \left\{y^i, x^i_\alpha\right\},\ \left\{x^i_\alpha\right\},\ \left\{y^\alpha\right\},\ \left\{x_\alpha, x^i_\alpha\right\},$$
$$\left\{x, y^p, y^i, x^i_\alpha, y^\alpha\right\},\ \left\{y, x_i, x_p, x_\alpha, x^i_\alpha\right\} \qquad (2.12)$$

образуют геометрические объекты, которые назовем оснащающими объектами касательно m-оснащенной регулярной гиперполосы $H_r(L)$. Оснащающие объекты определяют не только инвариантную нормализацию в смысле Нордена-Чакмазяна для гиперполосы $H_r(L)$ и ассоциированных с ней распределений, но и соответственно точечный $\left\{M_I\right\}$ и тангенциальный $\left\{\tau^K\right\}$ инвариантные реперы, присоединенные к гиперполосе $H_r(L)$. Элементы этих реперов следующим образом выражаются через элементы исходных реперов :

$$\begin{cases} M_o = A_o, & \sigma^o = \tau^o - x_p\tau^p - x_i\tau^i - \left(x_\alpha - x^i_\alpha x_i\right)\tau^\alpha + y\tau^n, \\ M_p = A_p + x_p A_o, & \sigma^p = \tau^p + y^p\tau^n, \\ M_i = A_i + x_i A_o, & \sigma^i = \tau^i + x^i_\alpha\tau^\alpha + y^i\tau^n, \\ M_\alpha = A_\alpha + x^i_\alpha A_i + x_\alpha A_o, & \sigma^\alpha = \tau^\alpha + y^\alpha\tau^n, \\ M_n = A_n - y^\alpha A_\alpha - \left(y^i + x^i_\alpha y^\alpha\right)A_i - y^p A_p - xA_o, & \sigma^n = \tau^n. \end{cases} \qquad (2.13)$$

§ 3. Построение внутренних инвариантных нормализаций в смысле Нордена - Чакмазяна и внутренних инвариантных реперов, ассоциированных с гиперполосой $H_r(L)$

1. Инвариантное оснащение (репер) касательно m-оснащенной регулярной гиперполосы $H_r(L)$ называется внутренним инвариантным оснащением (репером) k-го порядка, если оснащающие объекты (2.12) гиперполосы $H_r(L)$ являются функциями компонент фундаментального дифференциально-геометрического объекта k-го порядка рассматриваемой гиперполосы $H_r(L)$. Докажем, что для фундаментального дифференциально-геометрического объекта 3-го порядка гиперполосы $H_r(L)$ существуют алгебраические охваты, структура которых такая же, как и структура дифференциально-геометрических оснащающих объектов данной гиперполосы $H_r(L)$.

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{cases} L_i = \dfrac{1}{r} b_{pq}^n \cdot L_i^{pq}, \quad B^i = \dfrac{1}{r} b_{pq}^i b_n^{pq}, \\ B^\alpha = \dfrac{1}{r} b_{pq}^\alpha b_n^{pq}, \quad N_\alpha = \dfrac{1}{r} b_{pq}^n N_\alpha^{pq}, \end{cases} \tag{3.1}$$

удовлетворяющие уравнениям :

$$\nabla L_i + L_i \omega_o^o - \omega_i^o \equiv 0, \tag{3.2}$$

$$\nabla B^\alpha - B^\alpha \omega_n^n + \omega_n^\alpha \equiv 0, \tag{3.3}$$

$$\nabla B^i - B^i \omega_n^n + \omega_n^i + B^\alpha \omega_\alpha^i \equiv 0, \tag{3.4}$$

$$\nabla N_\alpha + N_\alpha \omega_o^o - L_i \omega_\alpha^i - \omega_\alpha^o \equiv 0. \tag{3.5}$$

Сравнивая уравнения (3.2), (3.3) соответственно с уравнениями (2.4), (2.7), находим, что в окрестности 1-го порядка гиперполосы $H_r(L)$ квазитензоры L_i и B^α определяют внутренние инвариантные плоскости

$$K_{l-1} = [M_i] = [A_i - L_i A_o],$$

$$_{m+1} = [\sigma^\alpha] = [\tau^\alpha - B^\alpha \tau^n].$$

Теперь сопоставим последовательно величины

$$\begin{cases} B_i^{pq} = L_i^{pq} - L_i b_n^{pq}, \quad B_{pq}^i = b_{pq}^i - B^i b_{pq}^n, \\ B_\alpha^{pq} = N_\alpha^{pq} - N_\alpha b_n^{pq}, \quad B_{pq}^\alpha = b_{pq}^\alpha - B^\alpha b_{pq}^n, \end{cases} \tag{3.6}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{cases} \nabla B_i^{pq} - b_i^{pq} \omega_n^n \equiv 0, \qquad \nabla B_{pq}^i + B_{pq}^i \omega_o^o + B_{pq}^\alpha \omega_\alpha^i \equiv 0, \\ \nabla B_\alpha^{pq} - B_\alpha^{pq} \omega_n^n - B_i^{pq} \pi_\alpha^i = 0, \quad \nabla B_{pq}^\alpha + B_{pq}^\alpha \omega_o^o \equiv 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Из уравнений (3.7) следует, что совокупности величин $\{B_i^{pq}\}$ и $\{B_{pq}^\alpha\}$ образуют тензоры 1-го порядка. Дальнейшие построения проводим для гиперполосы $H_r(L)$, которая допускает отличный от нуля инвариант $I = I(B_i^{pq}, B_{pq}^\alpha)$. Когда соприкасающаяся плоскость 2-го порядка заполняет все пространство, можно показать [4], что к гиперполосе $H_r(L)$ присоединяются поля объектов 1-го порядка $\tilde{B}_{pq}^i$, $\tilde{B}_\alpha^{pq}$ - обратные тензоры соответственно тензорам B_i^{pq} и B_{pq}^α :

$$\begin{cases} \tilde{B}_\alpha^{pq} B_{pq}^\beta = r\delta_\alpha^\beta, \; \tilde{B}_\alpha^{pq} B_{tq}^\alpha = (n-m-1)\delta_t^p, \; \tilde{B}_\alpha^{pq} B_{pq}^\alpha = r(n-m-1), \\ \tilde{B}_{pq}^i B_i^{pt} = (m-r)\delta_q^t, \; \tilde{B}_{pq}^i B_j^{pq} = \delta_j^i r, \; \tilde{B}_{pq}^i B_i^{pq} = r(m-r). \end{cases} \tag{3.8}$$

Тензоры $\tilde{B}_{pq}^i$, $\tilde{B}_\alpha^{pq}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla \tilde{B}_{pq}^i + \tilde{B}_{pq}^i \omega_n^n \equiv 0, \quad \nabla \tilde{B}_\alpha^{pq} - \tilde{B}_\alpha^{pq} \omega_o^o \equiv 0. \tag{3.9}$$

Наконец, в окрестности 1-го порядка гиперполосы $H_r(L)$ рассмотрим величины

$$\begin{cases} B^i_\alpha = \frac{1}{r} B^i_{pq} \hat{B}^{pq}_\alpha, \quad L_\alpha = B^i_\alpha L_i, \quad {}^i = B^\alpha B^i_\alpha, \\ \Lambda^i = B^i - {}^i, \quad \Lambda_\alpha = N_\alpha - {}_\alpha, \end{cases} \tag{3.10}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla B^i_\alpha + \omega^i_\alpha \equiv 0, \tag{3.11}$$

$$\nabla {}_\alpha + {}_\alpha \omega^o_o - B^i_\alpha \omega^o_i + L_i \omega^i_\alpha \equiv 0, \tag{3.12}$$

$$\nabla {}^i - {}^i \omega^n_n + B^i_\alpha \omega^\alpha_n + B^\alpha \omega^i_\alpha \equiv 0, \tag{3.13}$$

$$\nabla \Lambda^i - \Lambda^i \omega^n_n - B^i_\alpha \omega^\alpha_n + \omega^i_n \equiv 0, \tag{3.14}$$

$$\nabla \Lambda_\alpha + \Lambda_\alpha \omega^o_o - B^i_\alpha \omega^o_i - \omega^o_\alpha \equiv 0. \tag{3.15}$$

Сравнивая уравнения (3.11), (3.14), (3.15) с уравнениями (2.5)-(2.7), приходим к выводу, что поля квазитензоров $\{\Lambda^i, B^i_\alpha\}$ и $\{\Lambda_\alpha, B^i_\alpha\}$ задают внутренние инвариантные поля плоскостей :

$$ {}_{n\text{-}1} = \left[\sigma^i\right] = \left[\tau^i - \Lambda^i \tau^n - B^i_\alpha \tau^\alpha\right],$$

$$F_{n-m-2} = \left[M_\alpha\right] = \left[A_\alpha + B^i_\alpha A_i - \Lambda_\alpha A_o\right].$$

В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Двойственные друг другу нормали 1-го рода* K_{n-1} *и 2-го рода L-распределения внутренним инвариантным образом присоединяются к гиперполосе* $H_r(L)$ *в дифференциальной окрестности 1-го порядка, а двойственные друг другу нормали 1-го рода и нормали 2-го рода* F_{n-m-r} *F-распределения внутренним инвариантным образом присоединяются к гиперполосе* $H_r(L)$ *в дифференциальной окрестности 2-го порядка ее образующего элемента.*

2. Аналогично, следуя работам [1], [4], находим охваты оснащающих объектов $x_p = \Lambda_p$, $y^p = -\Lambda^p$, определяющих нормали 1-го рода N_{n-r} и 2-го рода гиперполосы $H_r(L)$. Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Двойственные друг другу нормали 1-го рода* N_{n-r} *и 2-го рода гиперполосы* $H_r(L)$ *внутренним инвариантным образом присоединяются в дифференциальной окрестности 3-го порядка ее образующего элемента.*

Наконец, по аналогии, следуя работам [1], [4], находим охваты функций **x** и **y** по формулам $x = -\overline{\Lambda}^o$, $y = \overline{\Lambda}_n$, что позволяет присоединить внутренним инвариантным образом к гиперполосе точечный $\{M_I\}$ и тангенциальный $\{\tau^K\}$ реперы в дифференциальной окрестности 3-го порядка. Они имеют вид:

$$M_o = A_o, \qquad \sigma^o = \tau^o + \Lambda_p\tau^p + L_i\tau^i + N_\alpha\tau^\alpha + \overline{\Lambda}_n\tau^n,$$

$$M_p = A_p - \Lambda_p A_o, \qquad \sigma^p = \tau^p - \Lambda^p\tau^n,$$

$$M_i = A_i - L_i A_o, \qquad \sigma^i = \tau^i - B^i_\alpha\tau^\alpha - \Lambda^i\tau^n,$$

$$M_\alpha = A_\alpha + B^i_\alpha A_i - \Lambda_\alpha A_o, \qquad \sigma^\alpha = \tau^\alpha - B^\alpha\tau^n,$$

$$M_n = A_n + B^\alpha A_\alpha + B^i A_i + \Lambda^p A_p + \overline{\Lambda}^o A_o, \qquad \sigma^n = \tau^n,$$

где

$$\overline{\Lambda}_o = \frac{a\tilde{x} + b\overline{x}}{a+b}, \qquad \overline{\Lambda}_n = \frac{a\tilde{y} + b\overline{y}}{a+b},$$

$$\tilde{x} = -L_i\Lambda^i - \Lambda_\alpha B^\alpha + \frac{1}{r}\tilde{\Lambda}^p_p + \frac{1}{r}b^n_{pq}\Lambda^p\Lambda^q,$$

$$\overline{y} = -L_i\Lambda^i - \Lambda_\alpha B^\alpha + \frac{1}{r}\overline{\Lambda}^p_p + \frac{1}{r}b^{pq}_n\Lambda_p\Lambda_q,$$

$$\overline{x} = -\left(\overline{y} + \Lambda_p\Lambda^p + L_i B^i + N_\alpha B^\alpha\right),$$

$$\tilde{y} = -\left(\tilde{x} + \Lambda_p\Lambda^p + N_\alpha B^\alpha + L_i B^i\right),$$

a, b - действительные числа.

Библиографический список

1. Попов Ю.И. Общая теория регулярных гиперполос : Учебное пособие / Калинингр. ун-т. Калининград, 1983. - 82 с.

2. Попов Ю.И., Столяров А.В. Специальные классы регулярных гиперполос: Учебное пособие / Калинингр. ун-т. Калининград, 1992. - 80 с.

3. Волкова С.Ю. $H(\Lambda, L)$-распределения проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1991. Вып. 22. С.23-25.

4. Остиану Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 239-263.

S.Ju.V o l k o v a

NORDEN-CHAKMAZYAN'S NORMALIZATIONS, ASSOCIATED WITH REGULAR HYPERSTRIP H_r (L) OF PROJECTIVE SPACE

Special class of regular hyperstrips H_r of projective space equipped by a field of L-planes of dimension l=m-r is considered in the article such that in each point A of base surface V_r of hyperstrip H_r (r<m<n-1) the relations $A \in L(A) \subset \chi_{n-r-1}(A)$ are fulfilled.

Such hyperstrips are shotly denoted by H_r (L) . Representation of hyperstrip H_r (L) in a frame of the first order is given and the existence theorem is proved: I_n an n-

dimensional proective space regular hyperstrips H_r (L) exist and are defined with arbitrariness of 2(n-r-1)+(n-m-1)(m-r)+1 functions of r arguments. The conditions of invariance of normalizations of the hiperstrip H_r (L) in the sence of Norden-Chakmazyan and distributions associated to it: -distributions of equipped planes L(A); L-distributions of planes

$_{n-m-1}(A) = N_{n-m}(A) \cap \chi_{n-r-1}(A)$ are determined. The equipping objects of hyperstrip H_r (L) which define not only the invariant normalization in the sence of Norden-Chakmazyan for the hyperstrip, -distribution and L -distributions but also point $\{M_J\}$ and tangential $\{\tau^K\}$ invariant frames respectively are introduced. Scopes of equipping objects in differential neighborhoods of the first, second and third orders of a generating element of the hyperstrip H_r (L), which make it possible in the interior invariant way to join fields of dual to each other normals of the first and the second order in the sence of Norden-Chakmazyan to the hyperstrip H_r (L) **,** L-distribution, -distribution are constructed. The point $\{M_J\}$ and tangential $\{\tau^K\}$ frames are joined in an interior way in the differential neighborhood of the third order to the hyperstrip H_r (L).