УДК 514. 76

М. В. Моргун

(*Пензенский государственный педагогический университет*)

О ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ НЕПЛОСКИХ ПРОЕКТИВНО-ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Исследуется структура алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения проективно-евклидовых пространств аффинной связности, каждая из которых имеет ненулевую кривизну.

1. Пусть $(M^n, {}^1\nabla)$ и $(N^m, {}^2\nabla)$ — пространства аффинной связности, $(M^n \times N^m, \nabla = {}^1\nabla \times {}^2\nabla)$ — прямое произведение этих пространств. Обозначим через $g(M^n \times N^m)$ алгебру Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(M^n \times N^m, \nabla)$. Векторное поле X называется инфинитезимальным аффинным преобразованием, если

$$L_X \nabla = 0. \qquad (1)$$

В локальных координатах это уравнение равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Первую серию условий интегрируемости этой системы составляют уравнения

$$L_X R^A_{BCD} = 0. \qquad (2)$$

Во всей работе будем придерживаться следующей схемы использования индексов: $i, j,\ldots = \overline{1,n}$; $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots = \overline{1,m}$; $\alpha, \beta, \ldots = \overline{n+1, n+m}$; $A, B, \ldots = \overline{1, n+m}$.

Составляющие тензора кривизны R^A_{BCD} пространства $(M^n \times N^m, \nabla)$ имеют следующее строение [1]:

$$R^A_{BCD} = \begin{cases} {}^1R^i_{jkl}, \ \textit{если} \ A = i, B = j, C = k, D = l; \\ {}^2R^{\bar{\alpha}}_{\overline{\beta\gamma\lambda}}, \ \textit{если} \ A = \bar{\alpha}, B = \bar{\beta}, C = \bar{\gamma}, D = \bar{\lambda}, \\ 0 \ - \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

На основании этого заключаем, что система (2) равносильна системе

$$\begin{aligned} &L_X R^i_{jkl} = 0,\ R^i_{skl} X^s_\alpha = 0,\ R^i_{jsl} X^s_\beta = 0,\ R^s_{jkl} X^\lambda_s = 0, \\ &L_X R^\alpha_{\beta\gamma\lambda} = 0,\ R^\alpha_{\xi\gamma\lambda} X^\xi_j = 0,\ R^\alpha_{\beta\xi\lambda} X^\xi_k = 0,\ R^\xi_{\beta\gamma\lambda} X^i_\xi = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

2. Пусть $(M^n, {}^1\nabla)$ и $(N^m, {}^2\nabla)$ — проективно-евклидовы пространства аффинной связности ненулевой кривизны, т. е. ${}^1R \neq 0, {}^2R \neq 0$, и тензоры Вейля ${}^1W$ и ${}^2W$ равны нулю. Развернув эти соотношения подробно [2], получаем, что первая серия условий интегрируемости (3) равносильна системе

$$\begin{aligned} &L_X R_{jk} = 0,\ (R_{kl} - R_{lk}) X^s_\alpha = 0,\ (nR_{jl} + R_{lj}) X^s_\beta = 0,\ R^s_{jkl} X^\lambda_s = 0, \\ &L_X R_{\beta\gamma} = 0,\ (R_{\gamma\lambda} - R_{\lambda\gamma}) X^\xi_j = 0,\ (mR_{\beta\lambda} + R_{\lambda\beta}) X^\xi_k = 0,\ R^\xi_{\beta\gamma\lambda} X^i_\xi = 0. \end{aligned}$$

Выделим подсистему

$$(R_{kl} - R_{lk}) X^s_\alpha = 0,\ (nR_{kl} + R_{lk}) X^s_\alpha = 0.$$

Отсюда находим, что

$$R_{kl} X^s_\alpha = 0. \tag{4}$$

Аналогично получаем, что

$$R_{\beta\lambda} X_k^{\xi} = 0\,. \tag{5}$$

Вследствие условий ${}^1R \neq 0,\ {}^2R \neq 0$ тензоры Риччи ${}^1R_{ij}, {}^2R_{\overline{\alpha\beta}}$ также ненулевые, тогда из (4) и (5) следуют соотношения $X_\alpha^i = 0$ и $X_k^\xi = 0$. Так как $X_\alpha^i = \partial_\alpha X^i$, $X_k^\xi = \partial_k X^\xi$, то X^i зависят только от $x^1, ..., x^n$, X^ξ — только от $x^{n+1}, ..., x^{n+m}$, т. е. $X = ({}^1X, {}^2X)$, где ${}^1X, {}^2X$ — векторные поля соответственно на M^n и N^m.

При подстановке полученных результатов в уравнение движений (1) получаем, что уравнение (1) пространства $(M^n \times N^m, \nabla)$ представляет собой систему

$$L_{{}^1X}\, {}^1\nabla = 0, \quad L_{{}^2X}\, {}^2\nabla = 0.$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Алгебра Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения неплоских проективно-евклидовых пространств аффинной связности* $g(M^n \times N^m)$ *изоморфна прямой сумме алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований* $g(M^n)$ *и* $g(N^m)$ *пространств* $(M^n, {}^1\nabla)$ *и* $(N^m, {}^2\nabla)$ *соответственно.*

Следовательно, группа движений прямого произведения неплоских проективно-евклидовых пространств аффинной связности изоморфна прямому произведению групп движений этих пространств. Подчеркнем, что это свойство в общем случае не выполняется.

Учитывая результаты И. П. Егорова [3], из теоремы 1 получаем следующие утверждения.

Следствие 1. *Если* $(M^n, {}^1\nabla)$ *и* $(N^m, {}^2\nabla)$ *— неплоские проективно-евклидовы пространства аффинной связности с симметрическими тензорами Риччи, то максимальная размерность* $g(M^n \times N^m)$ *равна точно* $n^2 + m^2$.

Следствие 2. *Если у пространства* $(M^n, {}^1\nabla)$ *тензор Риччи симметричный, а у пространства* $(N^m, {}^2\nabla)$ *тензор Риччи не является симметричным, то максимальная размерность* $g(M^n \times N^m)$ *равна точно* $n^2 + m^2 - m + 1$.

Следствие 3. *Если пространства* $(M^n, {}^1\nabla)$ и $(N^m, {}^2\nabla)$ — *неплоские проективно-евклидовы и их тензоры Риччи не являются симметричными, то максимальная размерность* $g(M^n \times N^m)$ *равна точно* $n^2 - n + m^2 - m + 2$.

Известно [3], что не существует проективно-евклидовых пространств аффинной связности с антисимметричным тензором Риччи. Поэтому при рассмотрении прямого произведения неплоских проективно-евклидовых пространств аффинной связности, кроме вышеперечисленных случаев, другие случаи не возникают.

Список литературы

1. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М., 1971.

2. *Синюков. Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. М., 1979.

3. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности // Ученные записки Пензенского пед. ин-та. Казань, 1965. С. 3—176.

M. Morgun

ON THE DIRECT PRODUCT OF NON-FLAT PROJECTIVE-EUCLIDEAN SPACES OF AFFINE CONNECTION.

The structure of Lie algebra of infinitesimal affine transformations of direct product of two locally projective-flat affine connection is studied.