П р е д л о ж е н и е 6. 2-скорость $(\ell)_2$ в $R(p,\pi)$ является 2-квазификсатором в том и только в том случае, если она содержит кривую, W-эквивалентную геодезической связности ∇.

4.Можно показать, что для пространств E_n $(n>2)$ и A_n $(n>1)$ справедливы утверждения, аналогичные предложению 2.Для пространства пар точек аффинного пространства A_n $(n>2)$ в общем случае имеют место аналоги предложений 3 и 4.

5.Применим понятия 2-фиксатора и 2-квазификсатора к изучению дифференцируемого отображения $\varphi: P_N \to R(p,\pi)$ [3,с.II].Из предложений 2,3,4 и теоремы 3.I работы [3] вытекает

П р е д л о ж е н и е 7. Чтобы вектор $(\ell)_1$ определял в $\ell(0)$ характеристическое (слабо характеристическое) направление отображения φ, необходимо и достаточно, чтобы 2-фиксатору $(\ell)_2 \subset (\ell)_1$ пространства P_N при отображении φ соответствовал 2-фиксатор (2-квазификсатор) $(\varphi\circ\ell)_2$ пространства $R(p,\pi)$.

Список литературы

I.Евтушик Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-В кн.: Проблемы геометрии .Т.9.М.,1979,с.5-246.

2.М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.-Тр.геом.семинара ВИНИТИ АН СССР,1969, с.179-206.

3.А н д р е е в Б.А.Некоторые вопросы геометрии многообразий пар фигур.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.12.Калининград,1981,с.8-12.

4.Р о з е н ф е л ь д Б.А. Проективная геометрия как метрическая геометрия.Тр.семинара по векторному и тензорному анализу,вып.8,с.328-354.

5.Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.- Геометрия. 1963 .Итоги науки .ВИНИТИ АН СССР,1965,с.65-107.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

Е.В.Бухарина,Е.В.Скрыдлова

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ,ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРИКОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрен частный класс вырожденных конгруэнций $(Q_p)_{1,2}$, порожденных квадрикой Q, описывающей однопараметрическое семейство,и плоскостью p, описывающей двупараметрическое семейство (конгруэнцию).Каждой плоскости p конгруэнции $(Q_p)_{1,2}$ ставится в соответствие единственная квадрика Q, полным прообразом которой является однопараметрическое семейство плоскостей p.Исследованы проективно-дифференциальные свойства некоторых геометрических образов,ассоциированных с выделенным классом конгруэнции $(Q_p)_{1,2}$.

Пусть C -линия пересечения плоскости p с соответствующей ей квадрикой Q.Проективное пространство P_3 отнесем к подвижному реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, в котором A_3 совмещена с характеристической точкой плоскости p, A_1 и A_2 расположены в точках пересечения коники C с полярой точки A_3 относительно этой коники, A_4 совпадает с полюсом плоскости p относительно квадрики Q.Уравнения квадрики Q и коники C относительно построенного репера с учетом соответствующей нормировки его вершин примут соответственно вид

$$(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2=0;$$

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0.$$

Дальнейшую нормировку вершин репера осуществим так, чтобы точка пересечения прямой $[A_1, A_2]$ с касательной плоскостью к поверхности (A_4) совпадала с единичной точкой $E_{1,2} = A_1 + A_2$ этой прямой.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $(Q_p)^\circ_{1,2}$ назовем конгруэнцию $(Q_p)_{1,2}$, для которой выполняются следующие условия: 1/ конгруэнция коник C расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_3, A_4); 2/ асимптотическая сеть на поверхности (A_3) огибается прямыми $[A_1, A_3], [A_2, A_3]$; 3/ поверхность $(E_{1,2})$ вырождается в линию.

С учетом всех условий определения система пфаффовых уравнений конгруэнции $(Q_p)^\circ_{1,2}$ записывается в виде

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = (-1)^i \frac{1}{2b} \omega_4^3 + \omega_3^j, \quad \omega_3^i = b\omega_j,$$

$$\omega_4^i = (-1)^j \cdot \frac{1}{2} \omega_4^3 + \omega_j, \quad \omega_4^3 = (3b^2+1)(\omega^1 - \omega^2), \quad (1)$$

$$\omega_3^4 = 0, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = 0, \quad \omega_4^4 - \omega_3^3 = -b\omega_4^3,$$

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = 2b(\omega_1 + \omega_2), \quad db = -b^2 \omega_4^3,$$

где формы $\omega_i^4 \overset{def}{=} \omega_i$ приняты в качестве базисных, $i, j, k = 1, 2$, причем $i \neq j$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что система уравнений (I) является вполне интегрируемой.

Т е о р е м а 1. Конгруэнция $(Q_p)^\circ_{1,2}$ обладает следующими геометрическими свойствами: 1/ прямолинейная конгруэнция (A_3, A_4) расслояема к прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$; 2/ фокусы F^1 и F^2 прямой $[A_1, A_2]$ гармонически разделяют вершины репера A_1 и A_2; 3/ фокальными точками коники C являются точки A_1, A_2, а также точки пересечения коники с прямыми $[F^1, A_3]$ и $[F^2, A_3]$; 4/ асимптотическая сеть невырождающейся фокальной поверхности прямолинейной конгруэнции (A_1, A_2) соответствует асимптотической сети поверхности (A_3); 5/ поверхности $(A_1), (A_2), (A_3)$ являются одной и той же инвариантной квадрикой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Условия одностороннего расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_3, A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1, A_2) в силу системы уравнений (1) удовлетворяются тождественно. 2/ Фокусы $F^{1,2} = sA_1 + tA_2$ прямой $[A_1, A_2]$ задаются уравнением $s^2 - t^2 = 0$, т.е. фокальными являются точки $F^1 = E_{1,2}$ и $F^2 = E^*_{1,2}$, где $E^*_{1,2} = A_1 - A_2$ – четвертая гармоническая к $E_{1,2}$ относительно A_1 и A_2. 3/ Фокальные точки коники C, ассоциированной с конгруэнцией $(Q_p)^\circ_{1,2}$, определяются системой уравнений

$$x^1 x^2 \left((x^1)^2 - (x^2)^2 \right)^2 = 0, \quad (x^3)^2 - 2x^1 x^2 = 0, \quad x^4 = 0,$$

решая которую, убеждаемся в справедливости утверждения 3 теоремы I. 4/ Фокальная поверхность $(F^2) \equiv (E^*_{1,2})$ прямолинейной конгруэнции (A_1, A_2) является невырождающейся. Асимптотическая сеть на поверхностях $(E^*_{1,2})$ и (A_3) задается одним и тем же уравнением $\omega_1 \omega_2 = 0$. 5/ Рассмотрим квадрику Φ, определяемую уравнением

$$\Phi \equiv (b^2 - 1)(x^4)^2 + 2x^1 x^2 - 2b x^3 x^4 = 0.$$

Имеем $d\Phi = (\ldots)\Phi$, т.е. квадрика Φ инвариантна. Так как точки A_1, A_2, A_3 принадлежат этой квадрике, то поверхности $(A_1), (A_2), (A_3)$ совпадают с ней.

Т е о р е м а 2. Прямая $[E^*_{1,2}; A_3]$ является директрисой Вильчинского поверхности $(E^*_{1,2})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Совершим замену репера R репером $R_1 = \{B_0, B_1, B_2, B_3\}$, в котором

$$B_0 \equiv E^*_{1,2}, \quad B_3 \equiv A_4,$$

$$B_1 \equiv 2bA_1 - \frac{1}{b}(2b^2+1)A_3 + A_4,$$

$$B_2 \equiv 2bA_2 + \frac{1}{b}(2b^2+1)A_3 - A_4,$$

(B_1 и B_2 являются точками пересечения асимптотических касательных поверхности $(E^*_{1,2})$ в точке $E^*_{1,2}$ соответственно с плоскостями $[A_1, A_3, A_4]$ и $[A_2, A_3, A_4]$). Система пфаффовых уравнений конгруэнции $(Q_p)^\circ_{1,2}$ в репере R_1 запишется в виде:

$$\omega_0^0=\frac{3}{4}b(b^2-1)(\omega^1-\omega^2),\ \omega_3^3=-\frac{b(3b^2+1)(6b^2-1)}{4(2b^2+1)}(\omega^1-\omega^2),$$

$$\omega_0^3=0,\ \omega_3^i=\frac{1}{4b}(\omega^1+\omega^2)+(-1)^i\frac{3b^2+1}{2(2b^2+1)}(\omega^1-\omega^2),$$

$$\omega_3^0=\frac{1}{2}\left(\frac{(3b^2+1)(4b^2+1)}{2b^2+1}-1\right)(\omega^1-\omega^2),\ \omega_i^3=\frac{2b(3b^2+1)}{2b^2+1}\omega^j,$$

$$\omega_i^j=(-1)^i b\omega^i+(-1)^j\frac{b(3b^2+1)}{2b^2+1}\omega^j,\ db=-b^2(3b^2+1)(\omega^1-\omega^2), \tag{2}$$

$$\omega_i^0=\frac{(3b^2+1)(2b^2-1)}{2(2b^2+1)}\omega^j+\frac{1}{2}(3b^2+1)\omega^i,$$

$$\omega_i^i=-\frac{b(6b^2-1)(3b^2+1)}{4(2b^2+1)}(\omega^1-\omega^2)+(-1)^i\frac{b^3}{2b^2+1}\omega^i,$$

где в качестве базисных взяты формы $\omega_0^i \overset{def}{\equiv} \omega^i$.

Находя директрисы Вильчинского поверхности $(E^*_{1,2})$, убеждаемся, что они имеют плюккеровы координаты $(-1,1,2,0,0,0)$ и $(0,0,0,1,0,0)$, т.е. совпадают с прямыми $d_1=[B_0,-B_1+B_2+2B_3]$ и $d_2=[B_1,B_2]$. В репере R $d_1=[E^*_{1,2};A_3]$, что и доказывает теорему.

С л е д с т в и е. Вторая директриса Вильчинского поверхности $(E^*_{1,2})$ совпадает с прямой $[B_1,B_2]$.

Квадрика Ли поверхности $(E^*_{1,2})$ относительно репера R_1 задается уравнением

$$-\frac{2b^2+1}{b(3b^2+1)}x^0x^3+2x^1x^2-x^1x^3+x^2x^3-\frac{2b^4+2b^2+1}{4b^2(3b^2+1)}(x^3)^2=0. \tag{3}$$

Перейдем в пространстве P_3 к нормальному [1] реперу $R_0=\{C_0,C_1,C_2,C_3\}$ поверхности $(E^*_{1,2})$, где

$$C_0\equiv B_0,\quad C_1\equiv B_1,\quad C_2\equiv B_2,$$

$$C_3\equiv\frac{2b^2-1}{2b}B_0-B_1+B_2+2B_3,$$

(C_3 является точкой пересечения первой директрисы Вильчинского d_1 с квадрикой Ли).

Система пфаффовых уравнений (2) конгруэнции $(Q_p)^0_{1,2}$ и уравнение (3) квадрики Ли относительно нормального репера запишутся соответственно в виде

$$\omega_0^0=\frac{3}{4}b(b^2-1)(\omega^1-\omega^2),\ \omega_0^3=0,\ \omega_i^3=\frac{b(3b^2+1)}{2b^2+1}\omega^j,$$

$$\omega_i^j=(-1)^i b\omega^i,\ \omega_i^i=(-1)^i\frac{b}{4}(9b^2-1)\omega^i+(-1)^j\frac{3b}{4}(3b^2+1)\omega^j,$$

$$\omega_i^0=\frac{1}{2}(3b^2+1)\omega^i,\ \omega_3^i=\frac{2b^2+1}{2b}\omega^j,\ \omega_3^0=-\frac{1}{2}(2b^2+1)(\omega^1-\omega^2), \tag{4}$$

$$\omega_3^3=-\frac{b(3b^2+1)(6b^2-5)}{4(2b^2+1)}(\omega^1-\omega^2),\ db=-b^2(3b^2+1)(\omega^1-\omega^2);$$

$$F\equiv(2b^2+1)x^0x^3-b(3b^2+1)x^1x^2=0. \tag{5}$$

Имеем

$$dF=(\ldots)F+\omega^1F_1+\omega^2F_2,$$

где

$$F_i\equiv(-1)^j\frac{1}{2}(2b^2+1)(x^3)^2+(-1)^j b^2(3b^2+1)(x^i)^2.$$

Система уравнений $F_1=0$, $F_2=0$ определяет характеристическое многообразие [2] квадрик Ли поверхности $(E^*_{1,2})$. Разрешая данную систему уравнений, находим характеристические прямые

$$\left[C_0,\ C_1+C_2\pm\frac{b\sqrt{2(3b^2+1)}}{2b^2+1}C_3\right]\quad\text{и}\quad[C_0,C_1-C_2],$$

причем последняя прямая является сдвоенной.

Фокальное многообразие [2] конгруэнции квадрик Ли поверхности $(E^*_{1,2})$ определяется системой уравнений

$$F=0,\ F_1=0,\ F_2=0. \tag{6}$$

Т е о р е м а 3. Точка $E^*_{1,2}$ является шестикратным фокусом квадрики Ли поверхности $(E^*_{1,2})$. Несовпадающие с $E^*_{1,2}$ фокусы квадрики Ли принадлежат прямой $[E_{1,2},A_3]$ и гармонически разделяют точки $E_{1,2}$ и A_3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Анализируя систему уравнений (6), находим восемь фокальных точек квадрики Ли, шесть из которых совпадают с точкой $C_0 \equiv E^*_{1,2}$, а два других определяются формулой

$$F_{7,8} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(3b^2+1)}\,C_0 + C_1 + C_2 \pm \frac{b\sqrt{2(3b^2+1)}}{2b^2+1}\,C_3 .$$

Возвращаясь к исходному реперу R, получим

$$F_{7,8} = 2b\,E_{1,2} \pm 2\sqrt{2(3b^2+1)}\,A_3 ,$$

откуда $(E_{1,2}, A_3; F_7, F_8) = -1$, что и доказывает утверждение теоремы.

Список литературы

1. Ф и н и к о в С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. М.-Л., ОНТИ, 1937.

2. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве. -Тр. геометр. семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с. 113-133.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
ВЫП. 13 1982

И.С. Г р и г о р ь е в а

МЕРА МНОЖЕСТВА ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ В E_n.

В работе изучается мера множества гиперплоскостей в E_n, инвариантная относительно группы движений. Отыскивается выражение этой меры через геометрические характеристики неголономного образа, а также дивергентный вид получаемой при этом гауссовой кривизны.

1. Семейство гиперплоскостей в E_n зависит от n параметров. Меру обычно ищут в виде интеграла $\int\Omega = \int f d\mu$, где μ -мера Лебега в пространстве параметров, а f - положительная интегрируемая функция.

Если за параметры взять расстояние P до гиперплоскости от начала координат и единичный вектор нормали $\bar n$, то с точностью до постоянного множителя, (ср. [1])

$$\pm\Omega = dP \wedge d\sigma , \qquad (1)$$

где $d\sigma$ -элемент сферического отображения. Знак выбирается так, чтобы $\int_U \Omega$ был положителен для любой области U.

Если рассмотреть в какой-либо области $V \subset E_n$ неголономный образ X^{n-1}_n, то можно говорить о мере множества составляющих его гиперплоскостей. Элемент меры Ω отыскивается с помощью введения поля ортонормированных реперов $\{e_\alpha\}$, $\alpha = \overline{1,n}$, где e_n -вектор нормали к гиперплоскости. Будем считать это поле гладким. Тогда

$$d\bar r = \omega^i \bar e_i + \omega^n \bar e_n ,$$
$$d\bar e_i = \omega^s_i \bar e_s + \omega^n_i \bar e_n , \quad i,s = \overline{1,n-1} ,$$