УДК 514.75

Ю.И. П о п о в

(*Калининградский государственный университет)*

f-СТРУКТУРЫ НА РАССЛОЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С МНОГООБРАЗИЕМ P_n^o(☟)

Тройку распределений

$$\nabla\Lambda^{\hat u}_p - \Lambda^{\hat u}_q\Lambda^{\hat v}_p\omega^p_{\hat v} + \omega^{\hat u}_p = \Lambda^{\hat u}_{pK}\omega^K_0, \quad \nabla M^{\hat\alpha}_a - M^{\hat\alpha}_b M^{\hat\beta}_a\omega^b_{\hat\beta} + \omega^{\hat\alpha}_a = M^{\hat\alpha}_{aK}\omega^K_0,$$

$$\nabla H^n_\sigma - H^n_\tau H^n_\sigma\omega^\tau_n + \omega^n_\sigma = H^n_{\sigma K}\omega^K_0 \tag{1}$$

($p,q,r,s,t=\overline{1,r}$; $\hat u,\hat v=\overline{r+1,n}$; $\hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma=\overline{m+1,n}$; $J,L,K=\overline{1,n}$; $a,b,c,d=\overline{1,m}$; $\tau,\sigma,\rho=\overline{1,n-1}$), образованную соответственно распределениями r-мерных плоскостей Λ (Λ-распределение), m-мерных плоскостей M (M-распределение), гиперплоскостей H (H-распределение, $r<m<n-1$) проективного пространства P_n с отношением инцидентности $X\in\Lambda\subset M\subset H$ их соответствующих элементов в каждом центре $X\equiv A_o$, назовём трёхсоставным распределением проективного пространства или ☟-распределением [1]. Λ-распределение назовём базисным распределением, а M-распределение и H-распределение - оснащающими распределениями данного ☟-распределения (1). ☟-распределение проективного пространства P_n будем трактовать как ☟-подрасслоение многообразия P_n^o [2]. Многообразие P_n^o, в котором задано ☟-подрасслоение (1), назовём расслоенным многообразием P_n^o(☟)-структуры или, кратко, многообразием P_n^o(☟).

В данной работе построены: 1) f-структура равна 2r, определённая аффинором $\left\{f^{\tilde A}_{\tilde B}\right\}$ $\left(\tilde A,\tilde B,\tilde C=\overline{1,n+r}\right)$ на многообразии ✌(Λ), базой которого является $B_n\equiv P_n$, а слоями – элементы Λ-подрасслоения; 2) $\hat f$ - структура ранга 2(n-r), заданная аффинором $\left\{f^{\hat A}_{\hat B}\right\}$ $\left(\hat A,\hat B=\overline{1,n};\overline{n+r+1,2n}\right)$ на расслоенном многообразии B(G), базой которого является $B_n\equiv P_n$, а слоями – элементы поля (n-r)-мерных оснащающих плоскостей G[1] (нормалей 1-ого рода Λ-подрасслоения).

1. Рассмотрим расслоенное многообразие ✌(Λ), размерность которого dim✌(Λ)=n+r. Структурные формы этого многообразия можно получить следующим образом. Будем считать, что многообразие P_n^o(☟) отнесено к реперу ☼(G,Λ), адаптированному внутренней нормализации (G,Λ) по А.П. Нордену [1] Λ- подрасслоения. Образующим элементом слоя Λ_x, где $x\in B_n$, является точка $X=A_0+x^pA_p$. Структурные формы Δx^p точки $X=A_0$ имеют следующее строение:

$$\Delta x^p = dx^p + x^q\omega_q^p - \theta x^p, \tag{2}$$

где

$$\theta = \omega_0^0 + x^q\omega_q^0,\ D\theta = \omega^K \Lambda \theta_K^0 + \Delta x^q \Lambda \omega_q^0,\ \theta_K^0 = \omega_K^0 + x^q \Lambda_{qK}^{\hat{u}}\omega_{\hat{u}}^0. \tag{3}$$

Непосредственным дифференцированием уравнений (2) с учётом (3) убеждаемся, что формы Δx^p имеют расслоенную структуру по отношению к базовым формам ω_0^K [3], [4]. Система форм $\theta^{\tilde{A}} \overset{\text{def}}{=} \{\theta^K \equiv \omega_0^K; \theta^{n+p} \equiv \Delta x^p\}$ вполне интегрируема:

$$D\theta^{\tilde{A}} = \theta^{\tilde{B}} \wedge \theta_{\tilde{B}}^{\tilde{A}},\quad D\theta_{\tilde{B}}^{\tilde{A}} = \theta_{\tilde{B}}^{\tilde{C}} \wedge \theta_{\tilde{C}}^{\tilde{A}} + \theta^{\tilde{C}} \wedge \theta_{\tilde{B}\tilde{C}}^{\tilde{A}}$$

и образует систему структурных форм многообразия ✌(Λ).

Многообразие ✌(Λ) примем теперь за базу нового расслоенного многообразия T(✌), где T(✌) - касательное расслоение к ✌(Λ). Введём в каждом слое расслоения T(✌) локальный репер $\{x, e_{\tilde{A}}\}$:

$$\delta e_{\tilde{A}} = \overline{\theta}_{\tilde{A}}^{\tilde{B}} e_{\tilde{B}}. \tag{4}$$

Компоненты матрицы $\left\|\theta_{\tilde{A}}^{\tilde{B}}\right\|$ имеют следующее строение [1]:

$$\overline{\theta}_K^J = \pi_K^J - \delta_K^J\pi_0^0,\ \overline{\theta}_{n+p}^J = 0,\ \overline{\theta}_{n+q}^{n+p} = \pi_q^p - \delta_q^p\pi_0^0 - x^p\pi_q^0, \tag{5}$$

$$\overline{\theta}_K^{n+p} = c^q\left[\Lambda_{qK}^i\pi_i^p - \left(\delta_q^p\pi_K^0 + \delta_q^p c^t\Lambda_{tK}^{\hat{u}}\pi_{\hat{u}}^0\right)\right],$$

где $c^q = \gamma_i^q\Lambda_{tp}^{\hat{u}}V_{\hat{u}}^{ji}b_j^{tp},\ \gamma_i^q = \chi_i^q - B_i^q$.

В силу формул (5) из уравнений (4) следует

$$\delta e_J = \left(\pi_J^K - \delta_J^K\pi_0^0\right)e_K + \overline{\theta}_J^{n+p}e_{n+p},\quad \delta e_{n+p} = \overline{\theta}_{n+p}^{n+q}e_{n+q}. \tag{6}$$

Следовательно, вектора e_{n+p} вместе с центром слоя $X=A_0$ определяют r-мерное инвариантное подпространство $\underset{(x)}{V_r^0}$ в текущем слое T_x(✌). Для того, чтобы в текущем слое T_x(✌) касательного расслоения T(✌) задать дополнительное инвариантное подпространство $\underset{(x)}{W_n}$, необходимо и достаточно задать на базе ✌(Λ) поле геометрического объекта $\left\{\Gamma_I^{n+p}\right\}$:

$$d\Gamma_J^{n+p} + \Gamma_J^{n+q}\theta_{n+q}^{n+p} - \Gamma_K^{n+p}\theta_J^K + \theta_J^{n+p} = \Gamma_{J\tilde{A}}^{n+p}\theta^{\tilde{A}}. \tag{7}$$

Объект $\left\{\Gamma_I^{n+p}\right\}$ присоединён к группе, представленной в слоях T_x(✌) как группа преобразований репера. Действительно, пусть $\left(x, E_{\tilde{A}}\right)$- репер в слое T_x(✌):

$$E_J = e_J + \Gamma_J^{n+p}E_{n+p},\ E_{n+p} = e_{n+p.} \tag{8}$$

При $\theta^{\tilde{A}} = 0$ имеем:

$$\delta E_I = \left(\pi_I^K - \delta_I^K\pi_0^0\right)E_K + \left(\delta\Gamma_I^{n+p} - \Gamma_K^{n+p}\overline{\theta}_I^K + \Gamma_I^{n+q}\overline{\theta}_{n+q}^{n+p} + \overline{\theta}_I^{n+p}\right)E_{n+p}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что если вектора E_J задают инвариантную n-плоскость в слое $T_x(\mathfrak{M})$, то необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (9).

2. Построим обхват объекта $\{\Gamma^{n+p}_J\}$ в репере R(Λ,G), причём $\{A_p\} \subset \Lambda(A_0)$, а вершины $A_{\hat\alpha}$ репера поместим в обобщённую плоскость Кёнигса данной нормализации Λ -подрасслоения. При выбранной специализации репера получим

$$\Lambda^{\hat u}_p = 0,\ \omega^{\hat u}_p = \Lambda^{\hat u}_{pK}\omega^K,\ \theta^q_p = \omega^q_p,\ \theta^{\hat v}_{\hat u} = \omega^{\hat v}_{\hat u},\ \theta^0_p = \omega^0_p,$$
$$\omega^t_{\hat u} = G^t_{\hat u K}\omega^K,\quad \omega^i_p = \Lambda^i_{pK}\omega^K,\quad \omega^0_K \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^K). \tag{10}$$

Следовательно, из формул (5) в силу (10) следует, что

$$\overline{\theta}^{n+p}_{n+q} = \pi^p_q - \delta^p_q\pi^0_0,\ \overline{\theta}^j_i = \pi^j_i - \delta^j_i\pi^0_0,\ \overline{\theta}^p_i = \pi^p_i,\ \overline{\theta}^i_p = \pi^i_p = 0,$$
$$\overline{\theta}^K_{n+p} = 0,\ \overline{\theta}^{n+p}_K = c^q\Lambda^i_{qK}\pi^p_i,\ \overline{\theta}^b_a = \pi^b_a - \delta^b_a\pi^0_0. \tag{11}$$

Учитывая (11), можно показать, что при любом фиксированном значении σ поле объекта

$$\underset{(\sigma)}{\gamma}{}^{n+p}_I \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{n}^q\Lambda^j_{qI}(\chi^p_j - (\sigma-1)\gamma^p_j) \tag{12}$$

удовлетворяет дифференциальным уравнениям (7). Таким образом, в окрестности 2-го порядка построен охват (12) объекта $\{\Gamma^{n+p}_I\}$. При каждом фиксированном значении σ объект $\{\underset{(\sigma)}{\gamma}{}^{n+p}_I\}$ определяет в слоях касательного расслоения $T(\mathfrak{M})$ инвариантное подпространство $W_n = [x, E_I]$.

3. Зададим на многообразии $\mathfrak{M}(\Lambda)$ поле геометрического объекта $\{f^{\hat A}_{\hat B}\}$:

$$df^{A}_{B} - f^{A}_{C}\theta^{C}_{B} + f^{C}_{B}\theta^{A}_{C} = f^{A}_{BC}\theta^{C}, \tag{13}$$

компоненты которого с учётом произведённой специализации репера $\mathfrak{R}(\Lambda,G)$ определим следующими формулами охвата:

$$f^I_K = \overset{r}{P}{}^I_p\,\underset{(\sigma)}{\gamma}{}^{n+p}_k,\qquad f^{n+p}_I = \overset{r}{P}{}^p_I + \overset{r}{P}{}^K_q\,\underset{(\sigma)}{\gamma}{}^{n+q}_I\,\underset{(\sigma)}{\gamma}{}^{n+p}_K,$$
$$f^I_{n+q} = -\overset{r}{P}{}^I_q,\qquad f^{n+p}_{n+q} = -\overset{r}{P}{}^K_q\,\underset{(\sigma)}{\gamma}{}^{n+p}_K, \tag{14}$$

где аффинор $\{\overset{r}{P}{}^I_K\}$ задаёт π-структуру (Λ, G) на многообразии $P^o_n(\mathfrak{M})$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции (14) удовлетворяют (13). Следуя В.И. Близникасу [5]-[6], поле тензора $\left\{ \underset{(\sigma)}{f}{}^{\hat{A}}_{\hat{B}} \right\}$ назовём γ-лифтом тензорного поля $\left\{ \overset{r}{P}{}^{J}_{K} \right\}$ в расслоение Т(✌). Компоненты $\left\{ f^{\tilde{A}}_{\tilde{B}} \right\}$ удовлетворяют соотношениям

$$f^{\tilde{A}}_{\tilde{C}} f^{\tilde{C}}_{\tilde{D}} f^{\tilde{D}}_{\tilde{B}} + f^{\tilde{A}}_{\tilde{B}} = 0. \qquad (15)$$

Следовательно, структура, определённая аффинором f на многообразии ✌(Λ), является f-структурой ранга 2r.

4. Рассмотрим расслоенное (2n-r)-мерное многообразие ✍(G).Пусть Т(✍)-касательное расслоение к многообразию ✍(G). Базисные формы многообразия ✍(G) обозначим через $\left\{ \hat{\theta}^{\hat{A}} \right\} \overset{def}{=} \left\{ \hat{\theta}^{K} \equiv \omega^{K}_{0}, \hat{\theta}^{n+\hat{u}} \equiv \Delta x^{\hat{u}} \right\}$. Аналогично построениям п.3 находим $\hat{f}$-структуру ранга 2(n-r), определённую полем аффинора $\left\{ \hat{f}^{\hat{A}}_{\hat{B}} \right\}$, являющегося $\hat{\gamma}$-лифтом тензорного поля типа $\left\{ \overset{n-r}{P}{}^{I}_{K} \right\}$ в расслоение Т(✍). Приведём охваты компонент аффинора $\left\{ \hat{f}^{\hat{A}}_{\hat{B}} \right\}$:

$$\hat{f}^{I}_{K} = \overset{n-r}{P}{}^{I}_{\hat{u}} \underset{(\sigma)}{\hat{\gamma}}{}^{n+\hat{u}}_{K}, \quad \hat{f}^{n+\hat{u}}_{K} = \overset{n-r}{P}{}^{\hat{u}}_{K} + \overset{n-r}{P}{}^{I}_{\hat{v}} \underset{(\sigma)}{\hat{\gamma}}{}^{n+\hat{v}}_{K} \underset{(\sigma)}{\hat{\gamma}}{}^{n+\hat{u}}_{I},$$

$$\hat{f}^{I}_{n+\hat{v}} = -\overset{n-r}{P}{}^{I}_{\hat{v}}, \quad \hat{f}^{n+\hat{u}}_{n+\hat{v}} = -\overset{n-r}{P}{}^{K}_{v} \underset{(\sigma)}{\hat{\gamma}}{}^{n+\hat{u}}_{K},$$

где $\underset{(\sigma)}{\hat{\gamma}}{}^{n+\hat{u}}_{K} = c^{i} G^{p}_{iK} V^{\hat{u}}_{p}(\sigma)$, $c^{i} = M^{\hat{\alpha}}_{pq} V^{ji}_{\hat{\alpha}} b^{pq}_{j}$. Таким образом, справедлива

Теорема. *π-структура (Λ, G), ассоциированная с многообразием P^{o}_{n} (✍), порождает внутренним образом в дифференциальной окрестности второго порядка на подрасслоениях ✌(Λ), ✍(G) соответственно однопараметрические пучки f-структур ранга 2r и $\hat{f}$ -структур ранга 2(n-r).*

Библиографический список

1. *Попов Ю.И.* Основы теории трёхсоставных распределений проективного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. 181с. Деп. в ВИНИТИ 5.11.09, №5625-В90.

2. *Остиану Н.М., Балазюк Т.Н.* Многообразия, погруженные в пространства проективной структуры // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С.75-115.

3. *Лаптев Г.Ф.* Многообразия, погруженные в обобщённые пространства // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. Л.: Наука, 1961. Т.2. С. 225-233.

4. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Фёдоровича Лаптева // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М.,1973. Т4. С.7-70.

5. *Близникас В.И.* Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов // Лит. мат. сб. 1966. Т.6. №2. С.141-209.

6. *Близникас В.И.* О внутренних тензорных структурах касательных пучков некоторых пространств опорных элементов // Тез. докл. IV Всесоюз. геом. конф. Тбилиси, 1969. С.22.

Yr.I. P o p o v

f-STRUCTURES ON STRATIFIED MANIFOLDS, ASSOCIATED WITH THE MANIFOLD P_n^o(☟)

Tree-compound distribution in the projective space is considered. f-structures are constructed on the base bundle and bundle, the fibers of which are 1-st kind normals of the surfaces.