ляющихся функциями точки и направления // Известия физико-математического общества и НИИ математики и механики при Казанском ун-те. Казань, 1938. Т.10. Сер.3. С.3-38.

6. Yano K. The theory of Lie derivatives and its applications. Amsterdam: North-Holland. Publ. Co.; Groningen: P. Noordhoff L.T.D. 1957. 299 p.

7. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

8. Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Знание, 1991. 48 с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, кибернетика". № 7).

9. Tresse A. Determination des invariants ponctuels de l'équation differentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. Leipzig, 1986.

10. Cartan E. Sur les varietes a connexion projective // Bull. Soc. math. de France. 1924. V.52. p.205-241.

11. Aguirre M., Krause J. SL(3,R) as the group of symmetry transformations for all one-dimensional linear systems. III. Realizations of the Lie Algebra // J. Math. Phys. 1988. V.29. №8. p.1746-1752.

УДК 514.75

О КОНФОРМНОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ОБЛАСТЯМИ ЕВКЛИДОВА n-ПРОСТРАНСТВА

Г.В.Кузнецов

(Тульский государственный педагогический институт)

Конформные соответствия между областями евклидова n-пространства – это хорошо изученный и важный для применений раздел дифференциальной геометрии.

В работе рассматриваются конформное соответствие между двумя областями Ω, $\bar\Omega$ евклидова пространства E^n и гиперраспределение Δ^{n-1} в области Ω. Находится необходимое и достаточное условие, при котором интегральные линии векторного поля $\vec e_n$ являются прямыми, где $\vec e_n \perp \Delta^{n-1}$.

Пусть $f:\Omega\to\bar\Omega$ – точечное невырожденное дифференцируемое отображение области Ω пространства E^n в область $\bar\Omega$ пространства E_n, так что для точки $x\in\Omega$ имеем $y=f(x)\in\bar\Omega$. Тогда в области Ω будет определено гиперраспределение Δ^{n-1}, ортогональное прямой (xy). В отображении f ему будет соответствовать гиперраспределение $\bar\Delta^{n-1}$ области $\bar\Omega$. Присоединим к точке x множество реперов $\{x, \vec e_i, \vec e_n\}$ $(i,j,k = 1,\dots,n-1)$ с началом в этой точке. Положим $\vec a_A = f_x^*(\vec e_A)$, где $A,B,C=\overline{1,n}$ и f_x^* – касательное линейное отображение к отображению f в точке x. Так как f_x^* – невырожденное отображение, то векторы $\vec a_A$ независимы и образуют репер в области $\bar\Omega$ с началом в точке y.

Уравнения перемещения реперов $\{x, \vec e_A\}$ и $\{y, \vec a_A\}$ запишем в виде

$$\begin{cases} d\vec x = \omega^A \vec e_A, & d\vec e_A = \omega_A^B \vec e_B; \\ d\vec y = \bar\omega^A \vec a_A, & d\vec a_A = \bar\omega_A^B \vec a_B; \end{cases} \tag{1}$$

1-формы, входящие в эти уравнения, удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства (см., напр.,[1]):

$$d\omega^A=\omega^B\wedge\omega_B^A,\quad d\omega_B^A=\omega_B^C\wedge\omega_C^A,\quad d\bar\omega^A=\bar\omega^B\wedge\bar\omega_B^A,\quad d\bar\omega_B^A=\bar\omega_B^C\wedge\bar\omega_C^A. \tag{2}$$

Основная система уравнений, определяющая распределение Δ^{n-1}, запишется в виде

$$\omega_i^n = \Lambda_{ij}\omega^j + \Lambda_i\omega^n,$$

т.е. Δ^{n-1} натянуто на векторы $\vec e_i$, а $\vec e_n$ им перпендикулярен.

Обозначим через $g_{AB}=(\vec e_A, \vec e_B)$ и $\bar g_{AB}=(\vec a_A,\vec a_B)$ метрические тензоры областей Ω и $\bar\Omega$ в точках x и y соответственно.

В силу согласованного выбора реперов в областях Ω и $\bar\Omega$ 1-формы ω^A и $\bar\omega^A$, определяющие перемещение точек x и y, связаны равенствами

$$\bar\omega^A=\omega^A. \tag{3}$$

Эти равенства представляют собой основные дифференциальные уравнения рассматриваемого соответствия $f:\Omega\to\bar\Omega$. Дифференцируя их внешним образом и применяя лемму Картана, получим

$$\bar\omega_B^A-\omega_B^A=h_{BC}^A\,\omega^C, \tag{4}$$

где $h_{BC}^A=h_{CB}^A$ – симметричный тензор деформации евклидовой связности при точечном соответствии f.

Предположим, что отображение $f:\Omega\to\bar\Omega$ является конформным, т.е.

$$\bar{g}_{AB} = e^{2\alpha} g_{AB} \tag{5}$$

Дифференцируя последнее соотношение и учитывая, что

$$dg_{AB} = g_{AC}\,\omega^C_B + g_{CB}\,\omega^C_A\,,\quad d\bar{g}_{AB} = \bar{g}_{AC}\,\bar{\omega}^C_B + \bar{g}_{CB}\,\bar{\omega}^C_A\,,$$

получим:

$$g_{AC}(\bar{\omega}^C_B - \omega^C_B) + g_{CB}(\bar{\omega}^C_A - \omega^C_A) = 2\,g_{AB}\,d\alpha .$$

Так как $\alpha = \alpha(x)$, то

$$d\alpha = \alpha_A\,\omega^A \tag{6}$$

Ввиду этого и соотношений (4) получим компоненты тензора h^A_{BC} [2]:

$$h^A_{BC} = \delta^A_B\,\alpha_C + \delta^A_C\,\alpha_B - g_{BC}\,\alpha^A . \tag{7}$$

Подставляя это выражение в (4), получим

$$\bar{\omega}^A_B - \omega^A_B = \delta^A_B\,d\alpha + \alpha_B\,\omega^A - \alpha^A\,\omega_B, \tag{8}$$

где $\quad \alpha^A = g^{AB}\alpha_B\,,\quad \omega_A = g_{AB}\,\omega^B.$

Найдем дифференциальные продолжения соотношений (6) и (8). Дифференцируя первые из них, получим

$$\nabla\alpha_A \wedge \omega^A = 0, \tag{9}$$

где $\nabla\alpha_A = d\alpha_A - \alpha_B\,\omega^B_A$ – ковариантный дифференциал ковектора α_A. Из соотношений (9) в силу леммы Картана следует, что

$$\nabla\alpha_A = \alpha_{AB}\,\omega^B, \tag{10}$$

где $\alpha_{AB} = \alpha_{BA}$. Далее, дифференцируя (8), найдем

$$(\nabla\alpha_A - \alpha_A\,d\alpha + \beta\,\omega_A)\wedge\omega_B - (\nabla\alpha_B - \alpha_B\,d\alpha + \beta\,\omega_B)\wedge\omega_A = 0, \tag{11}$$

где $\quad \beta = \frac{1}{2}\,g^{AB}\alpha_A\alpha_B .$

Далее имеем

$$\nabla\alpha_A - \alpha_A\,d\alpha + \beta\,\omega_A = (\alpha_{AB} - \alpha_A\alpha_B + \beta\,g_{AB})\,\omega^B = \tilde{\alpha}_{AB}\,\omega^B, \tag{12}$$

где

$$\tilde{\alpha}_{AB} = \alpha_{AB} - \alpha_A\alpha_B + \beta\,g_{AB} \tag{13}$$

также симметричный тензор. Подставляя (13) в (11), получим

$$(\tilde{\alpha}_{AC}\,g_{BK} - \tilde{\alpha}_{BC}\,g_{AK})\,\omega^C\wedge\omega^K = 0,$$

откуда следует, что

$$\tilde{\alpha}_{AC}\,g_{BK} - \tilde{\alpha}_{BC}\,g_{AK} - \tilde{\alpha}_{AK}\,g_{BC} + \tilde{\alpha}_{BK}\,g_{AC} = 0 . \tag{14}$$

Свертывая последнее соотношение с g^{AC}, найдем

$$(n-2)\,\tilde{\alpha}_{BK} = -\,\tilde{\alpha}\,g_{BK}\,,$$

где $\quad \tilde{\alpha} = g^{AC}\,\tilde{\alpha}_{AC}$

Так как нас интересует случай $n \geqslant 3$, то в этом случае имеем

$$\tilde{\alpha}_{BK} = -\frac{1}{n-2}\,\tilde{\alpha}\,g_{BK} .$$

Подставляя эти выражения в (14), получим $\tilde{\alpha} = 0$, в силу чего и $\tilde{\alpha}_{BK} = 0$. Теперь из (13) найдем

$$\alpha_{AB} = \alpha_A\,\alpha_B - \beta\,g_{AB}\,,$$

а из (10) получим

$$\nabla\alpha_A = \alpha_A\,d\alpha - \beta\,\omega_A . \tag{15}$$

Запишем далее

$$\vec{y} = \vec{x} + \rho\,\vec{e}_n . \tag{16}$$

Дифференцируя (16), получим:

$$\begin{cases} \vec{a}_i = (\delta^j_i - \rho\,\Lambda^j_i)\,\vec{e}_j + \rho_i\,\vec{e}_n\,, \\ \vec{a}_n = -\rho\,\Lambda^i\,\vec{e}_i + (1+\rho_n)\,\vec{e}_n\,, \end{cases} \tag{17}$$

где $\quad \Lambda^i_j = g^{ik}\Lambda_{kj}\,,\quad \Lambda^i = g^{ij}\Lambda_j\,,\quad d\rho = \rho_i\,\omega^i + \rho_n\,\omega^n.$

Пусть интегральные линии векторного поля $\vec{e}_n$ являются прямыми. Можно показать, что в этом случае $\Lambda_i = 0$. Тогда (17) перепишутся

$$\begin{cases} \vec{a}_i = (\delta^j_i - \rho\,\Lambda^j_i)\,\vec{e}_j + \rho_i\,\vec{e}_n\,, \\ \vec{a}_n = (1+\rho_n)\,\vec{e}_n . \end{cases} \tag{18}$$

Дифференцируя первые равенства из (18) и учитывая, что $\delta^j_i - \rho\Lambda^j_i = c^j_i$, получаем

$$d\vec{a}_i = (dc^j_i + c^k_i\,\omega^j_k + \rho_i\,\omega^j_n)\,\vec{e}_j + (c^j_i\,\omega^n_j + d\rho_i)\,\vec{e}_n . \tag{19}$$

С другой стороны, из (1) и (17), учитывая, что $\Lambda_i = 0$, получим

$$d\vec{a}_i = \bar{\omega}^k_i\,c^j_k\,\vec{e}_j + (\bar{\omega}^j_i\,\rho_j + (1+\rho_n)\,\bar{\omega}^n_i)\,\vec{e}_n . \tag{20}$$

Сравнивая (19) и (20), запишем

$$dc^j_i + c^k_i\,\omega^j_k + \rho_i\,\omega^j_n = \bar{\omega}^k_i\,c^j_k\,,\quad c^j_i\,\omega^n_j + d\rho_i = \bar{\omega}^j_i\,\rho_j + (1+\rho_n)\,\bar{\omega}^n_i . \tag{21}$$

Ввиду конформности отображения f имеем $\vec{a}_i \perp \vec{a}_n$, тогда $\vec{a}_i\cdot\vec{a}_n = \rho_i\,(1+\rho_n) = 0$. Так как f^*_x невырожденное отображение, то $1+\rho_n \neq 0$. Значит, $\rho_i = 0$. Тогда (18) запишется в виде

$$\vec{a}_i = c^j_i\,\vec{e}_j\;,\quad \vec{a}_n = (1+\rho_n)\,\vec{e}_n . \tag{22}$$

Так как $\rho_i = 0$, то (21) перепишется:

$$dc^j_i + c^k_i\,\omega^j_k = \bar{\omega}^k_i\,c^j_k\;,\quad c^j_i\,\omega^n_j = (1+\rho_n)\,\bar{\omega}^n_i . \tag{23}$$

Основная система уравнений, определяющая гиперраспределение $\bar{\Lambda}^{n-1}$, запишется в виде

$$\bar{\omega}_i^n = \bar{\Lambda}_{ij}\,\omega^j + \bar{\Lambda}_i\,\omega^n,$$

где

$$\bar{\Lambda}_{ij} = \Lambda_{ij} + h_{ij}^n, \quad \bar{\Lambda}_i = h_{in}^n.$$

Принимая во внимание конформность отображения f , найдем

$$h_{ij}^n = -\alpha_n g_{ij}, \quad h_{in}^n = \alpha_i. \qquad (24)$$

С учетом (24) получим

$$\bar{\Lambda}_{ij} = \Lambda_{ij} - \alpha_n g_{ij}, \quad \bar{\Lambda}_i = \alpha_i. \qquad (25)$$

Учитывая (25), запишем

$$\bar{\omega}_i^n = (\Lambda_{ij} - \alpha_n g_{ij})\,\omega^j + \alpha_i\,\omega^n. \qquad (26)$$

Далее, подставим $\omega_i^n = \Lambda_{ij}\,\omega^j$ и (26) во второе уравнение (23):

$$c_i^j \Lambda_{jk}\,\omega^k = (1+\rho_n)(\Lambda_{ij} - \alpha_n g_{ij})\,\omega^j + (1+\rho_n)\,\alpha_i\,\omega^n.$$

Ввиду линейной независимости форм ω^A из последней системы имеем следующее

$$c_i^k \Lambda_{kj} = (1+\rho_n)(\Lambda_{ij} - \alpha_n g_{ij}), \quad (1+\rho_n)\,\alpha_i = 0. \qquad (27)$$

Так как $(1+\rho_n) \neq 0$, то из второго уравнения (27) имеем $\alpha_i = 0$. Согласно последнему

$$d\alpha = \alpha_n\,\omega^n. \qquad (28)$$

В этом случае $\beta = \frac{1}{2}(\alpha_n)^2$ и из соотношений (15) следует, что

$$\omega_i^n = \frac{1}{2}\alpha_n\,\omega_i = \frac{1}{2}\alpha_n g_{ij}\,\omega^j, \quad d\alpha_n = \frac{1}{2}(\alpha_n)^2\,\omega^n. \qquad (29)$$

Из того, что $\omega_i^n = \Lambda_{ij}\,\omega^j$, и первого уравнения (29) заключаем

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2}\alpha_n g_{ij}, \qquad (30)$$

т.е. гиперраспределение Δ^{n-1} является сферическим [3].

Т е о р е м а. В случае конформного отображения $f:\Omega\to\bar{\Omega}$ интегральные линии векторного поля $\vec{e}_n$ являются прямыми тогда и только тогда, когда гиперраспределение Δ^{n-1} является сферическим.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В одну сторону теорема доказана. Докажем ее в обратную сторону. Пусть Δ^{n-1} – сферическое гиперраспределение, т.е. прямая (x,y) проходит через неподвижную точку C пространства E^n . Полагаем

$$\vec{C} - \vec{x} = c^n\vec{e}_n.$$

Дифференцируя левую и правую части (31) и используя условие

неподвижности точки C , получаем

$$c^n\omega_n^i = \omega^i, \quad dc^n = \omega^n. \qquad (32)$$

Первой группе уравнений (32) на основании того, что $\omega_n^i = -g^{ij}\omega_j^n$, можно придать вид $c^n\omega_k^n = -g_{kj}\,\omega^j$ и, следовательно,

$$c^n(\Lambda_{kj}\,\omega^j + \Lambda_k\,\omega^n) = -g_{kj}\,\omega^j, \quad c^n\Lambda_{kj} = -g_{kj}, \quad c^n\Lambda_k = 0.$$

Так как точка x не может быть неподвижной точкой, то $\Lambda_k = 0$, значит, интегральные линии векторного поля $\vec{e}_n$ – прямые.

Библиографический список

1. С т е р н б е р г С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1970.
2. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.:Наука, 1976.
3. А л ш и б а я Э.Д. Сферическое распределение // Тр. Тбилисск. ун-та. 1983. Т.239.

УДК 514.75

ПОЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА МНОГООБРАЗИИ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.С.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

В n-мерном проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ рассматриваются m-мерные $(m\le n)$ многообразия $\mathcal{K}(n-2,m,n)$ квадратичных элементов [1], гиперплоскости которых образуют m-параметрическое семейство. Дана геометрическая характеристика полей основных геометрических объектов, порожденных многообразием $\mathcal{K}(n-2,m,n)$.

Для случая $m=n$ найден тензор кривизны индуцированной аффинной связности, определяемой инвариантной нормализацией пространства $\mathcal{P}_n$.

1. Расположим вершины A_α $(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,n})$ репера $\{\bar{A}_0,\bar{A}_1,\dots,\bar{A}_n\}$ в гиперплоскости квадратичного элемента $Q_{n-2}\in\mathcal{K}(n-2,m,n)$. Тогда его уравнения приводятся к виду:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^0 = 0, \qquad (1.1)$$

где

$$\det(a_{\alpha\beta}) = 1. \qquad (1.2)$$