УДК 574.76

***В. С. Малаховский***
*Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград*
nikolaymal@mail.ru

## Удивительные свойства некоторых подмножеств простых чисел и их особая роль во множестве натуральных чисел

С использованием простых чисел построены пространственная модель множества N натуральных чисел. Выделены сорок квадратных трехчленов $f_a(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}(a^2 + 163)$, $a = 1, 2, 3, \ldots, 79$, определяющих одно и тоже подмножество попарно различных простых чисел при $x = \overline{a, \frac{1}{2}(a + 79)}$. Установлены некоторые закономерности в специальных подмножествах простых чисел.

***Ключевые слова:*** простое число, квадратный трехчлен, подмножество, закономерность.

### 1. Как возникли простые числа?

На протяжении многих тысячелетий простые числа привлекали особое внимание выдающихся философов и математиков. Как же они возникли? Одна из версий — следующая…

Единица у пифагорейцев была божеством и среди натуральных чисел выделялась особо. Четные числа считались женскими, нечетные — мужскими. Породить простые числа должна была женщина. Так возникли числа 2, 3 и их потомство 2 + 3 = 5. Число 7 в основных религиях занимало важную роль. Поэтому возникло множество четырех чисел {2, 3, 5, 7}. Далее, по-видимому, рассмотрели сумму

$$2x + y, \text{ где } x, y \in \{3, 5, 7\},$$

$$2 \cdot 3 + 5 = 11;\ 2 \cdot 3 + 7 = 13;\ 2 \cdot 5 + 3 = 11;\ 2 \cdot 5 + 7 = 17;$$
$$2 \cdot 7 + 3 = 17;\ 2 \cdot 7 + 5 = 19.$$

Возникла еще одна четверка {11, 13, 17, 19}. Числа множества {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} обладали свойствами: 1) каждое из них больше 1; 2) оно делится только на себя и на единицу.

А дальше построение простых чисел осуществлялось отбрасыванием тех натуральных чисел, которые делятся на одну из этих восьми или на возникающие новые простые числа. Достаточно вспомнить «решето Эратосфена».

В коллективной монографии «Живые числа» [1] сказано: «Никаких закономерностей в строении подмножеств простых чисел не существует. Они растут, как сорная трава, и никогда не скажешь, где возникнет новое простое число».

Я не согласен с первой частью этого утверждения, потому что в строении некоторых подмножеств простых чисел возникают закономерности. Рассмотрим несколько примеров.

**1.** Если в функциях

$$xy + z \cdot 2^{2n-1},\ x + yz \cdot 2^{2n-1},\ xy + 2^{2n-1}, \tag{1.1}$$
$$2x + y,\ x + y \cdot 2^{2n-1},\ 3x + 2^{2n-1},$$

где

$$x, y \in \{3, 5, 7\},\ n = 1, 2, 3 \text{ и } x, y, z \text{ — попарно различны,} \tag{1.2}$$

подставить в любом порядке вместо $x$ и $y$ простые числа из множества {3, 5, 7}, то получим (без пропуска!) восемнадцать троек простых чисел и одну четверку:

$$\{29, 71, 279\}, \{31, 61, 181\}, \{41, 59, 131,\}, \{73,283, 1123\},$$
$$\{47, 173, 677\}, \{37, 127, 487\}, \{17,23,47\}, \{23, 29, 53\},$$
$$\{37, 43, 67\}, \{13, 43, 163\}, \{17, 59, 227\}, \{11, 29, 101\},$$
$$\{19, 61, 229\}, \{13, 31, 103\}, \{17, 47, 167\}, \{17, 23,47\},$$
$$\{11, 17, 41\}, \{23, 29, 33\}, \{11, 13, 17, 19\}. \tag{1.3}$$

**2.** Функции:

1) $1+x = y;\ x, y \in \{5,7,11\}, \{13, 17, 19\};$

2) $7 + x = y$; $x, y \in \{23,29,31\}, \{59, 61, 67\}$;

3) $11 + x = y$; $x, y \in \{13,17,19\}, \{41, 43, 47\}$;

4) $19 + x = y$; $x, y \in \{32,29,31\}, \{71, 73, 79\}$;

5) $53 + x = y$; $x, y \in \{59,61,67\}, \{173, 179, 181\}$ (1.4)

преобразуют одну последовательную тройку простых чисел в другую также последовательную тройку простых чисел.

**3.** Для любого простого числа p ($5 \le p \le 31$, $p \ne 13$) число

$$p + x + y, \tag{1.5}$$

где $x+y$ — два простых числа, следующих за числом $p$, является простым. Действительно,

$$\begin{gathered} 5 + 7 + 11 = 23;\ 7 + 11 + 13 = 31;\ 11 + 13 + 17 = \\ = 41;\ 17 + 19 + 32 = 59; \\ 19 + 23 + 29 = 71;\ 23 + 29 + 31 = 83; \\ 29 + 31 + 37 = 97;\ 31 + 37 + 41 = 109. \end{gathered} \tag{1.6}$$

## 2. Пространственная модель натуральных чисел

Простые числа играют особую роль в математике. Оказывается, что, используя простые числа, можно построить пространственную модель множества натуральных чисел. Множество N натуральных чисел разбивается на два непересекающихся класса: числа пролонгируемые, когда среди четырех чисел

$$\{10n + 1, 10n + 3, 10n + 7, 10n + 9\} \tag{2.1}$$

есть хотя бы одно простое число, и числа непролонгируемые, когда все числа (2.1) — составные.

Например, для $n < 100$ существует только семь непролонгируемых чисел:

$$\{20, 32, 51, 53, 62, 84, 89\}. \tag{2.2}$$

Каждое пролонгируемое натуральное число $n$ порождает «дерево» простых чисел с последовательно увеличивающимися разрядами. Рассмотрим, например, числа 12, 14, 15.

12

127

1277 1279

* 12791 12799

127913 127997

1279133 *

12791333

*

14

149

1493 1499

14939 *

149393

*

15

151 157

1511 1571 1579

*

15791 15797

* *

Звездочка ставится на первом возникающем непролонгируемом простом числе.

Введем для пролонгируемого числа $n$ три координаты:

1) индекс $i_n$ — число простых чисел в самой длинной ветви, если $n$ — простое число, то оно включается в эту ветвь;

2) степень разветвленности $b_n$ («branch» — ветвь) — число ветвей в дереве;

3) суммарный индекс $S_n$ — число всех простых чисел в дереве.

Например, из (2.3) следует

$$12(6,3,9);\ 14(4,3,6);\ 15(3,4,7). \tag{2.4}$$

Компьютерная программа, составленная Н. В. Малаховским, позволила построить пространственную модель для первых 300 000 чисел. В этой модели только небольшое количество чисел удалено от начала координат на расстояние больше 25 единиц (45 чисел из 300 000), причем порядок их следования подтверждает многие догадки пифагорейцев [2, с. 174].

Единица удалена от начала приблизительно на 68 единиц, на 55 единиц удалена десятка (в молитве Пифагорейцев — та, что первая родилась). Далее 19 (40 единиц) — метоновский цикл луны (12 обычных лет, 7 високосных), 82 ($\approx 33$), 40 ($\approx 31$), 6 ($\approx 30$) — число души у Пифагора. В православной традиции душа усопшего отлетает к Богу на 40-й день. Остальные 39 чисел располагаются в интервале (25, 30).

Любому составному непролонгируемому числу ставится в соответствие начало координат (0,0,0), а любому простому непролонгируемому числу — единичная точка (1,1,1), устанавливающая масштаб модели.

## 3. Удивительные свойства сорока квадратных трехчленов

Обозначим через $M$ множество нечетных натуральных чисел от 1 до 79 включительно:

$$M = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 79\}. \tag{3.1}$$

Рассмотрим определяемые числами множества $M$ сорок квадратных трехчленов:

$$f_a(x) = x^2 - ax + \tfrac{1}{4}(a^2 + 163),\ a \in \mathrm{M}. \tag{3.2}$$

**Теорема 3.1.** *Квадратные трехчлены (3.2) обладают следующими свойствами.*

*1) Для любого целого неотрицательного числа $x_0$,*

$$0 \le x_0 \le \tfrac{1}{2}(a + 79), \tag{3.3}$$

число $f_a(x_0)$ — простое.

*2) При любом нечетном $a \le 79$ числа*

$$f_a(0), f_a(1), f_a(\tfrac{1}{2}(a + 79)) \tag{3.4}$$

определяют одно и то же множество $P_0$ попарно различных простых чисел

$$\begin{gathered}41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131,\\ 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421,\\ 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911,\\ 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601.\end{gathered} \tag{3.5}$$

*3) При любом $a \in \{1, 3, \ldots, 79\}$*

$$f_a(\tfrac{1}{2}(a + 79) + 1) = 41^2 = 1681. \tag{3.6}$$

*4) Свободные члены всех сорока квадратных трехчленов $f_a(x)$, т. е. числа $\tfrac{1}{4}(a^2+163)$, определяют то же самое множество $P_0$ сорока различных простых чисел (3.5).*

*Доказательство* осуществляется непосредственной проверкой, при этом множество свободных членов порождает ровно сорок простых чисел множества $P_0$, а значения (3.4) порождают некоторое количество повторяющихся простых чисел множества $P_0$. Например, многочлен Эйлера

$$f_{79}(x) \equiv x^2 - 79x + 1601, \tag{3.7}$$

при $x = \overline{0{,}79}$, порождает 80 простых чисел, из которых попарно различными являются только числа множества $P_0$.

В [3] рассмотрены рекуррентные формулы, порождающие подмножества простых чисел. Одна из этих формул (случай $k = 1$) определяет обобщенную арифметическую прогрессию с разностью $d$:

$$a_{n+1} = a_n + nd. \tag{3.8}$$

Обычная арифметическая прогрессия, как известно, определяется формулой

$$a_{n+1} = a_n + d. \tag{3.9}$$

**Теорема 3.2.** *Числа (3.5) являются первыми сорока числами обобщенной арифметической прогрессии (3.9) с первым членом $a_1 = 41$ и знаменателем $d = 2$.*

*Доказательство.* Имеем:

$$x_1 = 41,\ x_2 = 41 + 1{\cdot}2 = 43,\ x_3 = 43 + 2{\cdot}2 = 47,\ x_4 = 47 + 3{\cdot}2 = 53,$$
$$x_5 = 53 + 4{\cdot}2 = 61,\ x_6 = 61 + 5{\cdot}2 = 71,\ x_7 = 71 + 6{\cdot}2 = 83,$$
$$x_8 = 83 + 7{\cdot}2 = 97,\ x_9 = 97 + 8{\cdot}2 = 113,\ x_{10} = 113 + 9{\cdot}2 = 131,$$
$$x_{11} = 131+10{\cdot}2 = 151,\ x_{12} = 151+11{\cdot}2 = 173,\ x_{13} = 173+12{\cdot}2 = 197,$$
$$x_{14} = 197+13{\cdot}2 = 223,\ x_{15} = 223+14{\cdot}2 = 251,\ x_{16} = 251+ 15{\cdot}2 = 281,$$
$$x_{17} = 281+ 16{\cdot}2 = 313,\ x_{18} = 313+ 17{\cdot}2 = 347,\ x_{19} = 347+ 18{\cdot}2 = 383,$$
$$x_{20} = 383+ 19{\cdot}2 = 421,\ x_{21} = 421+ 20{\cdot}2 = 461,\ x_{22} = 461+ 21{\cdot}2 = 503,$$
$$x_{23} = 503+ 22{\cdot}2 = 547,\ x_{24} = 547+ 23{\cdot}2 = 593,\ x_{25} = 593+ 24{\cdot}2 = 641,$$
$$x_{26} = 641+ 25{\cdot}2 = 691,\ x_{27} = 691+ 26{\cdot}2 = 743, \tag{3.7}$$
$$x_{28} = 743+ 27{\cdot}2 = 797,\ x_{29} = 797+ 28{\cdot}2 = 853,\ x_{30} = 853+ 29{\cdot}2 = 911,$$
$$x_{31} = 911+ 30{\cdot}2 = 971,\ x_{32} = 971+ 31{\cdot}2 = 1033,$$
$$x_{33} = 1033+ 32{\cdot}2 = 1097,\ x_{34} = 1097+ 33{\cdot}2 = 1163,$$
$$x_{35} = 1163+ 34{\cdot}2 = 1231,\ x_{36} = 1231+ 35{\cdot}2 = 1301,$$
$$x_{37} = 1301+ 36{\cdot}2 = 1373,\ x_{38} = 1373+ 37{\cdot}2 = 1447,$$
$$x_{39} = 1447+ 38{\cdot}2 = 1523,\ x_{40} = 1523+ 39{\cdot}2 = 1601.$$ Ч. т. д.

## 4. О трех необычных свойствах подмножеств простых чисел

1. Среди простых чисел, меньших 43, имеется удивительная четверка последовательных простых чисел

$$\{29, 31, 37, 41\}. \tag{4.1}$$

**Теорема 4.1.** *Сумма любых трех чисел четверки (4.1) есть простое число, причем четыре образующиеся таким образом простые числа образуют почти последовательную четверку*

$$\{97, 101, 107, 109\} \tag{4.2}$$

*(пропущено только простое число 103).*

*Доказательство.*

$$29 + 31 + 37 = 97,\ 29 + 31 + 41 = 101,$$

$$29 + 37 + 41 = 107,\ 31 + 37 + 41 = 109.$$

Интересно, является ли четверка (4.1) единственной среди множества $P$ простых чисел?

2. Пусть $B$ — множество всех простых чисел p таких, что:

а) $p < 150$; (4.3)

б) $p$ не принадлежит множеству $\{2,3,19,97,137\}$. Разобьем множество $B$ на последовательные тройки:

$$\{5, 7, 11\}, \{13, 17, 23\}, \{29, 31, 37\}, \{41, 43, 47\}, \{53, 59, 61\},$$
$$\{67, 71, 73\}, \{79, 83, 89\}, \{101, 103, 107\},$$
$$\{109, 113, 127\}, \{131, 139, 149\}. \tag{4.4}$$

**Теорема 4.2.** *Сумма простых чисел каждой тройки (4.4) есть простое число.*

*Доказательство.*

$$5 + 7 + 11 = 23;\ 13 + 17 + 23 = 53;$$

$$29 + 31 + 37 = 97,\ 41 + 43 + 47 = 131,\ 53 + 59 + 61 = 173;$$

$$67 + 71 + 73 = 211,\ 79 + 83 + 89 = 251,\ 101 + 103 + 107 = 311,$$

$$109 + 113 + 127 = 349,\ 131 + 139 + 149 = 419.$$ Ч. т. д.

Возникает подмножество десяти простых чисел

$$\{23, 53, 97, 131, 173, 211, 251, 311, 349, 419\}. \qquad (4.5)$$

3. Пусть $D$ — множество таких простых чисел, что:

а) $5 \leq p \leq 181$;

б) $p$ не оканчивается на 3;

в) $p \notin \{37, 79, 107, 109, 131, 149, 157\}$. (4.6)

**Теорема 4.3.** *Для любого простого числа $p \in D$ число $12 + p$ является простым.*

*Доказательство.* Имеем:

$$12 + 5 = 17,\ 12 + 7 = 19,\ 12 + 11 = 23,\ 12 + 17 = 29,\ 12 + 19 = 31,$$
$$12 + 29 = 41,\ 12 + 31 = 43,\ 12 + 41 = 53,\ 12 + 47 = 59,\ 12 + 61 = 73,$$
$$12 + 67 = 79,\ 12 + 71 = 83,\ 12 + 89 = 101,\ 12 + 97 = 109,$$
$$12 + 101 = 113,\ 12 + 127 = 139,\ 12 + 137 = 149,\ 12 + 139 = 151,$$
$$12 + 151 = 163,\ 12 + 167 = 179,\ 12 + 179 = 191,\ 12 + 181 = 193.$$

### *Список литературы*


1. *Боро В., Цагир Д., Рольфс Ю. и др.* Живые числа. М., 1985.
2. *Малаховский В.С.* Числа знакомые и незнакомые. Калининград, 2004.
3. *Малаховский В.С.* Об одной рекуррентной формуле, порождающей подмножества простых чисел // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2004. Вып. 35. С. 79—84.


*V. Malakhovsky*

## Wonderful properties of some subsets of prime numbers and their special role in the set N of natural numbers

Using prime numbers the space — model of the set N of natural numbers is constructed. Forty quadratic trinomials $f_a(x)=x^2 - ax + \frac{1}{4}(a^2 + 163)$, $a = 1, 2, 3, \ldots, 79$, defining the same set of pairwise different prime number for $x = \overline{a, \frac{1}{2}(a+79)}$ are selected. Some regularities in some subsets of prime numbers are established.