значит каждое f-характеристическое в точке C направление является асимптотическим направлением в A_n.

Утверждение, сформулированное в последней теореме, является аналогом результата, полученного для точечного отображения $P_m \to P_n$ при $m < n$ В.В.Рыжковым, [3].

Список литературы

1. Кретов М.В. Дифференцируемые отображения, ассоциированные с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве.-Калининградский ун-т. Калининград, 1981 (рукопись депонирована в ВИНИТИ 22 июня 1981г., №3003-81 Деп.).

2. Кретов М.В. О связностях, ассоциированных с комплексом центральных квадрик в аффинном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.12. Калининград, 1981, с.35-39.

3. Рыжков В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n -Тр. геометрического семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, с.235-242.

4. Схоутен И.А. и Стройк Д.Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М., 1948.

5. Андреев Б.А. Характеристические направления соответствия между точечным пространством и пространством пары (p,q) -В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6, Калининград, 1975, с.5-18.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Т.Н.Крысова

КОНГРУЭНЦИИ ЭЛЛИПСОВ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ АССОЦИИРОВАННЫХ ПАРАБОЛОИДОВ

В трехмерном эквиаффинном пространстве A_3 рассматривается конгруэнция (C) эллипсов C. Под конгруэнцией (C) понимается такая конгруэнция эллипсов, у которой центры образующих элементов описывают поверхность (A), не вырождающуюся в линию или плоскость и не являющуюся торсом, а также касательная плоскость к поверхности (A) в текущей точке совпадает с плоскостью соответствующего эллипса. Введены ассоциированные с (C) параболоиды H, квадрики Q_1 и Q_2. Рассмотрены свойства конгруэнций (C), а также свойства некоторых подклассов этих конгруэнций со специальными свойствами ассоциированных параболоидов.

1. Отнесем конгруэнцию (C) к каноническому реперу $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, где A -центр эллипса, векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ направлены по асимптотическим касательным поверхности (A), вектор $\vec{e}_3$ направлен по аффинной нормали к этой поверхности. Концы векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ -точки A_1 и A_2 соответственно принадлежат эллипсу.

С каждым эллипсом ассоциируется единственный параболоид H, определяемый следующим образом: 1/эллипс принадлежит параболоиду H, и его плоскость сопряжена с диаметром параболоида; 2/прямая, проходящая через центр эллипса, с направляющим вектором $\vec{e}_3$ является диаметром параболоида; 3/точка A_3 -конец вектора $\vec{e}_3$ -принадлежит параболоиду. В репере R уравнения эллипса C и параболоида H запишутся соответственно

$\mathfrak{F} \equiv (x^1)^2+(x^2)^2+2\lambda x^1x^2-1=0,\ x^3=0$ (1); $\Phi \equiv (x^1)^2+(x^2)^2+2\lambda x^1x^2+x^3-1=0, |\lambda|<1.$ (2)

Система уравнений Пфаффа конгруэнции (C) примет следующий вид:

$$\omega^3=0,\quad \omega_i^3=b\omega^j,\ \omega_i^j=a_j\omega^i,\ \Omega^J=c_i^J\omega^i,$$
$$db=2b(\lambda a_j-c_i^1-c_i^2)\omega^i,\ c_1^4=c_2^5+\lambda(c_1^5-c_2^4), \tag{3}$$

где

$$\omega^1\wedge\omega^2\neq 0,\ b\neq 0,\ i,j=1,2;\ i\neq j;\ J=1,2,3,4,5;\ \Omega^i=\lambda\omega_i^j-\omega_j^j;$$
$$\Omega^3=\omega_2^1+\omega_1^2-d\lambda-\lambda\omega_i^i;\ \Omega^4=\omega_3^1+\lambda\omega_3^2;\ \Omega^5=\omega_3^2+\lambda\omega_3^1$$

(по j -не суммировать).

Из системы (3) следует, что конгруэнция (C) определяется с произволом четырех функций двух аргументов. Фокальные точки эллипса C и ассоциированного параболоида H описываются соответственно системами уравнений:

$$\mathfrak{F}=0,\ x^3=0,\ \widetilde{\mathfrak{F}}\equiv c_1^1(x^1)^3+(\lambda^2a_2-\lambda c_1^1-\lambda c_1^2+c_1^3-c_2^1)(x^1)^2x^2+(x^1)^2+$$
$$+(-\lambda^2a_1+\lambda c_2^2+\lambda c_2^1-c_2^3+c_1^2)x^1(x^2)^2+(\lambda a_2-c_1^1-c_1^2)x^1-c_2^2(x^2)^3-$$
$$-(x^2)^2-(\lambda a_1-c_2^2-c_2^1)x^2=0, \tag{4}$$

$$\Phi=0,\ \Phi_i\equiv-2c_i^1(x^1)^2-2c_i^2(x^2)^2-2c_i^3x^1x^2-2c_i^4x^1x^3-2c_i^5x^2x^3-$$
$$-\hat{c}_ix^1-\hat{c}_jx^2+3(\lambda a_j-c_i^1-c_i^2)x^3-2(\lambda a_j-c_i^1-c_i^2), \tag{5}$$

где $\hat{c}_1=2,\ \hat{c}_2=2\lambda+b.$

О п р е д е л е н и е 1. Квадрики Q_i, определяемые соответственно уравнениями $\Phi_i=0$, называются ассоциированными квадриками конгруэнции (C).

Условия $c_i^3=0,\ c_i^4=0,\ c_i^5=0$ означают соответственно, что векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ сопряжены относительно квадрики Q_i. Условия $c_i^1=0$ и $c_i^2=0$ означают, что направления векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ соответственно являются асимптотическими направлениями квадрики Q_i. Очевидно также, что вектор $\vec{e}_3$ является вектором асимптотического направления квадрик Q_1 и Q_2.

Анализируя системы уравнений (4) и (5), убеждаемся, что конгруэнции (C) обладают следующими свойствами: 1/если точка A_i является фокальной точкой параболоида H, то она является фокальной точкой эллипса C; таким же свойством обладают точки $A_1^*(-1,0,0)$ и $A_2^*(0,-1,0)$; 2/точки A_i и A_i^* не могут быть одновременно фокальными точками эллипса C, а следовательно, параболоида H; 3/если векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ сопряжены относительно эллипса C, то свойство 1/ выполняется для любой точки эллипса.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнция (C) называется односторонне расслояемой, если существует одностороннее расслоение от конгруэнции (C) к прямолинейной конгруэнции (AA_3).

Т е о р е м а 1. Если векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ конгруэнции (C) сопряжены относительно эллипса C, то конгруэнция (C) не может быть односторонне расслояемой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что конгруэнция (C) с сопряженными относительно эллипса векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ является односторонне расслояемой. Тогда выполняются соотношения: $\lambda=c_1^2=c_2^1=c_2^5=0;\ c_1^5=c_2^4=-\frac{1}{b};\ c_1^1=a_1;\ c_2^2=a_2$, которые приводят к противоречивости системы (3).

2. О п р е д е л е н и е 3. 1/Конгруэнции (C), у которых точки A_1 и A_2 являются фокальными точками параболоида H и векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не сопряжены относительно эллипса C, называются конгруэнциями (C_{12}). 2/Конгруэнции (C), у которых точки A_1 и A_2 являются фокальными точками параболоида H и векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ сопряжены относительно эллипса C, называются конгруэнциями (C_{12}^1).

Конгруэнции (C_{12}) определяются системой уравнений Пфаффа:

$$\omega^3=0,\ \omega_i^3=b\omega^j,\ \omega_i^j=a_j\omega^i,\ \Omega^i=\tfrac{1}{2}(2\lambda+b+2\lambda a_j)\omega^i+(1+\lambda a_i)\omega^j,$$
$$\Omega^\xi=c_i^\xi\omega^i,\ c_1^4=c_2^5+\lambda(c_1^5-c_2^4),$$
$$db=b(2-2\lambda-b-2\lambda a_2)\omega^1+b(2-2\lambda-b-2\lambda a_1)\omega^2, \tag{6}$$
$$c_2^5=\frac{1}{b}\left[a_1(1-2\lambda+\lambda^2-\lambda b-2\lambda^2a_2+c_1^3)+2\lambda^2+\tfrac{1}{2}\lambda b+\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{4}b^2-c_2^3\right],$$
$$c_1^5=\frac{1}{b\lambda}\left[(a_2-a_1)(1-2\lambda+\lambda^2-\lambda b)+c_2^3(a_2+1)+\lambda b c_2^4\right],$$

где $\lambda\neq 0$, $\xi=3,4,5$, с произволом пяти функций одного аргумента. Конгруэнции (C^1_{12}) определяются системой уравнений Пфаффа:

$$\omega^3=0,\ \omega^3_i=b\omega^j,\ \omega^j_i=a_j\omega^i,\ \Omega^1=\frac{1}{2}b\omega^1+\omega^2,$$
$$\Omega^2=\omega^1+\frac{1}{2}b\omega^2,\ \Omega^4=c^5_2\omega^1+c^4_2\omega^2,\ \Omega^5=c^5_i\omega^i, \qquad (7)$$
$$db=-b(b+2)(\omega^1+\omega^2),\ c^5_2=-\frac{b}{4}-\frac{3}{2}+\frac{a_1a_2}{b}$$

с произволом четырех функций одного аргумента.

Анализируя (7), убеждаемся в том, что конгруэнции (C^1_{12}) с невырождающимися квадриками Q_1 и Q_2 обладают следующими свойствами: 1/векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не являются векторами асимптотического направления квадрик Q_1 и Q_2; 2/вектор $\vec{e}_3$ сопряжен с вектором $\vec{e}_1$ относительно квадрики Q_1 тогда и только тогда, когда он сопряжен с вектором $\vec{e}_2$ относительно квадрики Q_2.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции (C^1_{12}) обладают следующими свойствами: 1/фокальные поверхности (A_i) не могут вырождаться в плоскости; 2/фокальная поверхность (A_i) тогда и только тогда вырождается в линию, когда векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ сопряжены относительно квадрики Q_i (квадрика Q_i считается невырожденной).

Т е о р е м а 3. Фокальные поверхности (A_1) и (A_2) конгруэнций (C_{12}) и (C^1_{12}) тогда и только тогда вырождаются в линии, когда прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) вырождается в связку прямых с общим центром или во множество прямых, принадлежащих одной и той же плоскости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) имеет следующий вид:

$$a_2(\omega^1)^2-a_1(\omega^2)^2=0. \qquad (8)$$

Если фокальные поверхности (A_1) и (A_2) вырождаются в линии, то $a_1=a_2=0$. Уравнение торсов (8) тождественно удовлетворяется. Верно и обратное. Теорема доказана.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978; ч.1; 1980, ч.2.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

М.К.К у з ь м и н

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЕТЕЙ Σ^S_n В A_n

В аффинном пространстве A_n, используя геометрические свойства распределений, порожденных плоской сетью, выделяется класс сетей Σ^S_n $(1\le S\le n-1)$ Этот класс включает в себя и сети Σ^S_n $(S\ge\frac{n}{2})$, изученные автором в работе [2]. В статье указывается верхняя граница произвола существования сетей Σ^S_n $(1\le S\le n-1)$ в A_n. Рассматривается пример сети Σ^S_n $(S<\frac{n}{2})$, определяющейся с самым широким произволом.

1. Возьмем в аффинном пространстве A_n плоскую сеть I. С каждой точкой $x\in A_n$ свяжем аффинный репер $(x,\vec{e}_i)$ $(i,j,k=1,2,\dots,n)$, построенный на касательных к линиям данной сети в точке x, при этом пфаффовы формы ω^j_i $(i\ne j)$ становятся главными:

$$\omega^j_i=a^j_{ik}\omega^k \quad (i\ne j).$$

Разобьем семейства линий сети Σ_n на S классов, где $1\le S\le n-1$ $(n=qS+\tau,\ q=[\frac{n}{S}],\ \tau<S)$. Два семейства ω^i,ω^j принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $i\equiv j\ (\mathrm{mod}\,S)$. Нумеруем классы $t,t'=1,2,\dots,S$. Для удобства рассуждений введем в каждом классе свою нумерацию семейств линий, причем такую, чтобы при возрастании старых номеров возрастали и новые номера $u_t,v_t=1_t,2_t,\dots,q'_t(t)$ ($q'(t)$ -число семейств в классе с номером t, $q'(t)$ может принимать только значения, равные $q+1,q$), и если $\omega^{u_t}=\omega^i$, $\omega^{u_{t'}}=\omega^j$, $i<j$, то $t<t'$. Отсюда $q'(t)=q+1$ для $t=1,2,\dots,\tau$ и $q'(t)=q$ для $t=\tau+1,\dots,S$.

Распределение Δ_m назовем Δ_p -параллельным $(\Pi_m(x)\subset\Pi_p(x))$, если плоскости $\Pi_m(x+dx)$, $\Pi_p(x)$