6. Попов Ю.И., Сферические гиперполосы многомерного проективного пространства P_n. Ученые записки Калининградского государственного университета, 1969, вып. I, 27-57.

7. Попов Ю.И., К теории оснащенных регулярных гиперполос многомерного проективного пространства. Тезисы докладов 4 Всесоюзной Межвузовской конференции, Тбилиси, 1969, 209-210.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Б.А. АНДРЕЕВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ ПАР ФИГУР В ТОЧЕЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Пусть F -пара фигур ранга N [I], состоящая из невырожденной гиперквадрики q n-мерного проективного пространства P_n и неинцидентной ей точки p. Исследуется биективное дифференцируемое отображение φ пространства этой пары $R(F)$ в точечное проективное N-мерное пространство P_N. Найден основной объект отображения, построены и геометрически охарактеризованы различные поля геометрических объектов, охватываемые полем основного объекта.

§ I. Построение системы фундаментальных объектов отображения.

Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $\tau=\{\bar{\tau}_0,\bar{\tau}_1,\dots,\bar{\tau}_n\}$, а пространство P_N к реперу $R=\{\bar{R}_0,\bar{R}_1,\dots,\bar{R}_N\}$. Деривационные формулы реперов τ и R имеют соответственно вид:

$$d\bar{\tau}_{i'}=\omega_{i'}^{j'}\bar{\tau}_{j'} \qquad (i',j',k',\ldots=0,1,\ldots,n), \qquad (1.1)$$

$$d\bar{R}_{\mathcal{J}'}=\Omega_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}\bar{R}_{\mathcal{K}'} \qquad (\mathcal{J}',\mathcal{K}',\mathcal{L}',\ldots=0,1,\ldots,N), \qquad (1.2)$$

где формы Пфаффа $\omega_{i'}^{j'}$, $\Omega_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}$ подчинены структурным уравнениям Картана:

$$\mathcal{D}\omega_{i'}^{j'}=\omega_{i'}^{k'}\wedge\omega_{k'}^{j'}, \quad \mathcal{D}\Omega_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}=\Omega_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{L}'}\wedge\Omega_{\mathcal{L}'}^{\mathcal{K}'}. \qquad (1.3)$$

Поместим нулевую вершину $\bar{\tau}_0$ репера τ в точку p, вершины $\bar{\tau}_i$ ($i,j,k,\ldots=1,2,\ldots,n$) в полярную гиперплоскость π точки p относительно гиперквадрики q.

При таком расположении вершин репера уравнение гиперквадрики q имеет вид :

$$a_{ij} x^i x^j + (x^0)^2 = 0, \qquad (1.4)$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0 \qquad (1.5)$$

Положим

$$\theta_{ij} \equiv da_{ij} - a_{kj}\omega^k_i - a_{ik}\omega^k_j + 2a_{ij}\omega^0_0 \qquad (1.6)$$

Обозначив формы Пфаффа $\omega^{j'}_{i'}$ при фиксированном образующем элементе F через $\pi^{j'}_{i'}$, получим следующую систему дифференциальных уравнений стационарности пары F :

$$\overset{\circ}{\theta}_{ij} = 0, \quad \pi^0_i = 0, \quad \pi^i_0 = 0. \qquad (1.7)$$

Здесь и в дальнейшем нолик над формой Пфаффа означает фиксацию первичных параметров. Из (I.7) следует, что формы

$$\theta_{ij}, \ \omega^0_i, \ \omega^i_0 \qquad (1.8)$$

суть главные формы многообразия $R(F)$. Имеем:

$$\dim R(F) = N = C^2_n + 3n. \qquad (1.9)$$

Легко показать, что подсистемы $\pi^0_i = 0$; $\pi^0_i = \pi^i_0 = 0$; $\overset{\circ}{\theta}_{ij} = \pi^i_0 = 0$ системы (I.7) вполне интегрируемы. Их первые интегралы определяют нетривиально индуцируемые [I] парой F фигуры : гиперплоскость π ; пару, состоящую из точки p и гиперплоскости π ; гиперконус:

$$a_{ij} x^i x^j = 0. \qquad (1.10)$$

Среди этих фигур максимальный ранг $\bar{N} = C^2_n + 2n - 1$ имеет гиперконус (I.10). Таким образом, пара F является индуцирующей парой индекса $\bar{N} = C^2_n + 2n - 1$ [I] . Из уравнений (I.7) видно, что система величин $\Gamma_0 = a_{ij}$ образует тензор. Учитывая (I.5), введем систему приведенных миноров a^{ij} матрицы (a_{ij}), характеризующихся соотношениями :

$$a^{ik} a_{kj} = \delta^i_j. \qquad (1.11)$$

Система величин a^{ij} образует тензор, подобный тензору a_{ij} :

$$\delta a^{ij} = -a^{kj}\pi^i_k - a^{ik}\pi^j_k + 2a^{ij}\pi^0_0. \qquad (1.12)$$

Поместив нулевую вершину репера R пространства P_N в точ-

ку $P = \varphi(F)$, приведем систему дифференциальных уравнений отображения φ к виду :

$$\theta_{ij} = \Lambda_{ij\gamma}\Omega^\gamma_0, \quad \omega^i_0 = \Lambda^i_\gamma \Omega^\gamma_0, \quad \omega^0_i = \Lambda_{i\gamma}\Omega^\gamma_0; \quad (\gamma, \varkappa, l = 1, 2, \ldots, N) \qquad (1.13)$$

причем матрица отображения предполагается невырожденной, что обеспечивает локальную биективность отображения .

Осуществляя двухкратное продолжение системы (I.13), получим :

$$\Delta\Lambda_{ij\gamma} = \Lambda_{ij\gamma\varkappa}\Omega^\varkappa_0, \quad \Delta\Lambda^i_\gamma = \Lambda^i_{\gamma\varkappa}\Omega^\varkappa_0, \quad \Delta\Lambda_{i\gamma} = \Lambda_{i\gamma\varkappa}\Omega^\varkappa_0,$$

$$\Delta\Lambda_{ij\gamma\varkappa} = \Lambda_{ij\gamma\varkappa l}\Omega^l_0, \quad \Delta\Lambda^i_{\gamma\varkappa} = \Lambda^i_{\gamma\varkappa l}\Omega^l_0, \quad \Delta\Lambda_{i\gamma\varkappa} = \Lambda_{i\gamma\varkappa l}\Omega^l_0,$$

$$\Delta\Lambda_{ij\gamma\varkappa l}\wedge\Omega^l_0 = 0, \quad \Delta\Lambda^i_{\gamma\varkappa l}\wedge\Omega^l_0 = 0, \quad \Delta\Lambda_{i\gamma\varkappa l}\wedge\Omega^l_0 = 0,$$

где

$$\Delta\Lambda_{ij\gamma} \equiv d\Lambda_{ij\gamma} - \Lambda_{kj\gamma}\omega^k_i - \Lambda_{ik\gamma}\omega^k_j - \Lambda_{ijl}\Omega^l_\gamma + \Lambda_{ij\gamma}(\Omega^0_0 + 2\omega^0_0),$$

$$\Delta\Lambda^i_\gamma \equiv d\Lambda^i_\gamma + \Lambda^j_\gamma\omega^i_j - \Lambda^i_\varkappa\Omega^\varkappa_\gamma + \Lambda^i_\gamma(\Omega^0_0 - \omega^0_0),$$

$$\Delta\Lambda_{i\gamma} \equiv d\Lambda_{i\gamma} - \Lambda_{k\gamma}\omega^k_i - \Lambda_{il}\Omega^l_\gamma + \Lambda_{i\gamma}(\Omega^0_0 + \omega^0_0),$$

$$\Delta\Lambda_{ij\gamma\varkappa} \equiv d\Lambda_{ij\gamma\varkappa} - \Lambda_{kj\gamma\varkappa}\omega^k_i - \Lambda_{ik\gamma\varkappa}\omega^k_j - \Lambda_{ijl\varkappa}\Omega^l_\gamma - \Lambda_{ij\gamma l}\Omega^l_\varkappa + {}$$
$$+ 2\Lambda_{ij\gamma\varkappa}(\Omega^0_0 + \omega^0_0) - \Lambda_{ij(\gamma}\Omega^0_{\varkappa)},$$

$$\Delta\Lambda^i_{\gamma\varkappa} \equiv d\Lambda^i_{\gamma\varkappa} + \Lambda^j_{\gamma\varkappa}\omega^i_j - \Lambda^i_{l\varkappa}\Omega^l_\gamma - \Lambda^i_{\gamma l}\Omega^l_\varkappa + \Lambda^i_{\gamma\varkappa}(2\Omega^0_0 - \omega^0_0) - \Lambda^i_{(\gamma}\Omega^0_{\varkappa)},$$

$$\Delta\Lambda_{i\gamma\varkappa} \equiv d\Lambda_{i\gamma\varkappa} - \Lambda_{j\gamma\varkappa}\omega^j_i - \Lambda_{il\varkappa}\Omega^l_\gamma - \Lambda_{i\gamma l}\Omega^l_\varkappa + \Lambda_{i\gamma\varkappa}(2\Omega^0_0 + \omega^0_0) - \Lambda_{i(\gamma}\Omega^0_{\varkappa)},$$

а формы Пфаффа $\Delta\Lambda_{ij\gamma\varkappa l}$, $\Delta\Lambda^i_{\gamma\varkappa l}$, $\Delta\Lambda_{i\gamma\varkappa l}$ имеют аналогичный вид. При этом системы величин $\Lambda_{ij\gamma\varkappa}$, $\Lambda^i_{\gamma\varkappa}$,... симметричны по всем своим однотипным индексам. Здесь и в дальнейшем $a_{(\gamma}b_{\varkappa)}$ означает: $a_\gamma b_\varkappa + a_\varkappa b_\gamma$.

Система величин $\Gamma_1 = \{a_{ij}, \Lambda_{ij\gamma}, \Lambda^i_\gamma, \Lambda_{i\gamma}\}$ образует фундаментальный геометрический объект первого порядка рассматриваемого отображения. Система величин $\Gamma_2 = \{\Gamma_1, \Lambda_{ij\gamma\varkappa}, \Lambda^i_{\gamma\varkappa}, \Lambda_{i\gamma\varkappa}\}$ образует фундаментальный объект второго порядка. Из уравнений (I.14) следует, что подсистемы : $\Gamma^{(1)}_1 = \{\Lambda_{ij\gamma}\}$, $\Gamma^{(2)}_1 = \{\Lambda^i_\gamma\}$, $\Gamma^{(3)}_1 = \{\Lambda_{i\gamma}\}$ являются тензорами, а $\Gamma^{(1)}_2 = \{\Gamma^{(1)}_1, \Lambda_{ij\gamma\varkappa}\}$, $\Gamma^{(2)}_2 = \{\Gamma^{(2)}_1, \Lambda^i_{\gamma\varkappa}\}$, $\Gamma^{(3)}_2 = \{\Gamma^{(3)}_1, \Lambda_{i\gamma\varkappa}\}$

являются подобъектами фундаментального объекта Γ_2 .

§2. Основной объект отображения.

Т е о р е м а. Фундаментальный объект второго порядка является основным объектом отображения φ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения основного объекта [2] следует, что надо доказать алгебраическую разрешимость системы дифференциальных уравнений

$$\overset{\circ}{\Theta}_{ij}=0,\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{ij\mathcal{J}}=0,\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda^{i}_{\mathcal{J}}=0,\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{i\mathcal{J}}=0, \tag{2.1}$$

$$\overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{ij\mathcal{J}\mathcal{K}}=0,\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda^{i}_{\mathcal{J}\mathcal{K}}=0,\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}}=0 \tag{2.2}$$

локального фундаментального объекта Γ_2 относительно всех вторичных форм:

$$\hat{\pi}^{j}_{i}=\pi^{j}_{i}-\delta^{j}_{i}\pi^{\circ}_{\circ},\quad \hat{\Pi}^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}}=\Pi^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}}-\delta^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}}\Pi^{\circ}_{\circ}. \tag{2.3}$$

Так как система дифференциальных уравнений (2.I),(2.2) вполне интегрируема, то начальные значения фундаментального объекта Γ_2 можно задавать произвольно.

Зададим для компонент Γ_2 следующие начальные значения:

$$a_{ij}=\delta^{j}_{i},\ \Lambda_{ij1}=i\delta^{j}_{i}\ ,\text{остальные}\ \ \Lambda_{ij\mathcal{J}}=\delta^{C}_{N-\mathcal{J}+1}\ ,\text{где}$$

$$C=\begin{cases}(j-i)n-\frac{1}{2}(j-i)(j-i-1)+i, & \text{при } j\geq i\\ 0, & \text{при } j<i,\end{cases}\quad \Lambda_{1\mathcal{J}}=1, \tag{2.4}$$

$$\Lambda_{i\mathcal{J}}=\delta^{\mathcal{J}}_{n+i}\ \text{при}\ i>1,\ \Lambda^{i}_{\mathcal{J}}=\delta^{i}_{\mathcal{J}},\ \Lambda^{1}_{\mathcal{J}\mathcal{K}}=\delta^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}},\ \Lambda^{2}_{\mathcal{J}\mathcal{K}}=\mathcal{J}\delta^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}},$$

где $\delta^{\beta}_{\alpha}=\begin{cases}\text{I, если } \alpha=\beta,\\ \text{0, если } \alpha\neq\beta\end{cases}$

Остальные начальные значения компонент положим равными нулю. Такое задание компонент Γ_2 обеспечивает невырожденность матрицы преобразования (I.I3), а уравнения (2.I),(2.2) разрешаются относительно всех форм (2.3) следующим образом:

$$\hat{\pi}^{i}_{i}=\frac{1}{2}a_{ii},\ \hat{\pi}^{i}_{j}=\frac{1}{i-j}(\delta\Lambda_{ij1}-j\delta a_{ij}),\ \hat{\Pi}^{\circ}_{\mathcal{J}}=-\frac{1}{2}\delta\Lambda_{1\mathcal{J}\mathcal{J}},$$

$$\hat{\Pi}^{1}_{1}=\frac{1}{4}(2\delta\Lambda^{1}_{11}+\delta a_{11}+2\delta a_{12}-\delta\Lambda_{121}-2\delta\Lambda_{111}),$$

$$\hat{\Pi}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}}=\frac{1}{4}[\delta a_{11}+\mathcal{J}(2\delta a_{12}-\delta\Lambda_{121})+2\delta\Lambda^{1}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}]\ \text{при}\ \mathcal{J}>1,$$

$$\hat{\Pi}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}=\frac{1}{2(\mathcal{K}-\mathcal{J})}[\delta_{\mathcal{J}}\delta\Lambda^{2}_{1\mathcal{K}\mathcal{K}}+\delta^{2}_{\mathcal{K}}\delta\Lambda_{1\mathcal{J}\mathcal{J}}-2\delta\Lambda^{2}_{\mathcal{J}\mathcal{K}}-\mathcal{K}(\delta^{1}_{\mathcal{J}}\delta\Lambda_{1\mathcal{K}\mathcal{K}}+\delta\Lambda_{1\mathcal{J}\mathcal{J}}\delta^{1}_{\mathcal{K}}-2\delta\Lambda^{1}_{\mathcal{J}\mathcal{K}})]$$

Здесь $i\neq j$, $\mathcal{J}\neq\mathcal{K}$ и по индексам i,j и $\mathcal{J},\mathcal{K}$ суммирование не производится. Для завершения докащательства заметим, что, как легко показать, система дифференциальных уравнений (2.I) локального фундаментального объекта Γ_1 не разрешима относительно форм Пфаффа (2.3).

С л е д с т в и е . Надлежащее задание компонент объекта $\Gamma_3=\{\Gamma_2,\Lambda_{ij\mathcal{K}L},\Lambda^{i}_{\mathcal{J}\mathcal{K}L},\Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}L}\}$ определяет отображение φ с точностью до постоянных [2].

§ 3. Поля геометрических объектов, определяемые отображением φ .

Рассмотрим сначала геометрические объекты, охватываемые фундаментальным объектом первого порядка Γ_1 .

Его подобъект $\{\Gamma_{\circ},\Gamma^{(1)}_{1}\}$ определяет следующие системы величин:

$$A_{\mathcal{J}}=a^{ij}\Lambda_{ij\mathcal{J}}, \tag{3.1}$$

$$A_{\mathcal{J}\mathcal{K}}=a^{ij}a^{pq}\Lambda_{ip\mathcal{J}}\Lambda_{jq\mathcal{K}}\quad(A_{\mathcal{J}\mathcal{K}}=A_{\mathcal{K}\mathcal{J}}) \tag{3.2}$$

Дифференциальные уравнения:

$$\delta A_{\mathcal{J}}=A_{\mathcal{K}}\Pi^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}-A_{\mathcal{J}}\Pi^{\circ}_{\circ},\ \delta A_{\mathcal{J}\mathcal{K}}=A_{L\mathcal{K}}\Pi^{L}_{\mathcal{J}}+A_{\mathcal{J}L}\Pi^{L}_{\mathcal{K}}-2A_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\Pi^{\circ}_{\circ} \tag{3.3}$$

показывают, что эти системы величин образуют соответственно одно- и двухвалентные ковариантные тензоры в пространстве P_N .

Тензор $A_{\mathcal{J}}$ определяет в P_N инвариантную гиперплоскость

$$A_{\mathcal{J}}X^{\mathcal{J}}=0, \tag{3.4}$$

проходящую через точку $P=\varphi(F)$. Двухвалентный симметрический тензор $A_{\mathcal{J}\mathcal{K}}$ определяет инвариантный конус

$$A_{\mathcal{J}\mathcal{K}}X^{\mathcal{J}}X^{\mathcal{K}}=0, \tag{3.5}$$

вершиной которого является точка P . В случае, когда $\det(A_{\mathcal{J}\mathcal{K}})\neq 0$, можно ввести контравариантный тензор $A^{\mathcal{J}\mathcal{K}}$, компоненты которого суть приведенные миноры матрицы $(A_{\mathcal{J}\mathcal{K}})$:

$$A^{\gamma\iota}A_{\iota\varkappa}=\delta^{\gamma}_{\varkappa},\qquad(3.6)$$

$$\delta A^{\gamma\varkappa}=-A^{\iota\varkappa}\Pi^{\gamma}_{\iota}-A^{\gamma\iota}\Pi^{\varkappa}_{\iota}+2A^{\gamma\varkappa}\Pi^{\circ}_{\circ}\qquad(3.7)$$

Один раз контравариантный тензор

$$A^{\gamma}=A_{\varkappa}A^{\gamma\varkappa},\quad \delta A^{\gamma}=-A^{\iota}\Pi^{\gamma}_{\iota}+A^{\gamma}\Pi^{\circ}_{\circ}\qquad(3.8)$$

определяет инвариантную прямую

$$\bar A_{\lambda}=A^{\gamma}\bar R_{\gamma}+\lambda\bar P,\qquad(3.9)$$

проходящую через точку P ,так как

$$\bar A_{\lambda}+\delta\bar A_{\lambda}=(1+\Pi^{\circ}_{\circ})\bar A_{\mu}\quad ,\text{где}\quad \mu=\lambda+\delta\lambda+A^{\gamma}\Pi^{\circ}_{\gamma}.\qquad(3.10)$$

Законы преобразования всех тензоров одинаковой валентности, охватываемых полем фундаментального объекта Γ_1 ,совершенно аналогичны друг другу.Одинаковое строение имеют и все инвариантно присоединенные геометрические образы,ими определяемые : это квадратичные и кубичные гиперконусы с вершинами в точках P и p, гиперплоскости и прямые,проходящие через эти же точки.

Различными подобъектами Γ_1 охватываются следующие объекты в пространствах P_N и P_n :

$$B_{\gamma\varkappa}=\tfrac{1}{2}\Lambda^{i}_{(\gamma}\Lambda_{|i|\varkappa)},\ B^{\gamma\varkappa}\quad(B^{\gamma\varkappa}B_{\varkappa\iota}=\delta^{\gamma}_{\iota}),$$
$$C^{ij}=\Lambda^{i}_{\gamma}\Lambda^{j}_{\varkappa}B^{\gamma\varkappa},\quad \bar C_{ij}=\Lambda_{i\gamma}\Lambda_{j\varkappa}B^{\gamma\varkappa},\qquad(3.11)$$
$$P_{\gamma\varkappa}=a_{ij}\Lambda^{i}_{\gamma}\Lambda^{j}_{\varkappa},\quad \bar P_{\gamma\varkappa}=a^{ij}\Lambda_{i\gamma}\Lambda_{j\varkappa}.$$

Подобъектом $\{\Gamma_0,\Gamma_1^{(1)},\Gamma_1^{(2)}\}$ объекта Γ_1 охватываются тензоры :

$$M_{\gamma\varkappa\iota}=\Lambda_{ij\gamma}\Lambda^{i}_{\varkappa}\Lambda^{j}_{\iota},\ m^{ij}=A^{\gamma\varkappa}\Lambda^{i}_{\gamma}\Lambda^{j}_{\varkappa},\ M_{\gamma}=m^{ij}\Lambda_{ij\gamma},$$
$$M^{\gamma}=A^{\gamma\varkappa}M_{\varkappa},\ m^{i}=A^{\gamma}\Lambda^{i}_{\gamma},\ v_{ijk}=a_{ip}A^{\gamma\varkappa}\Lambda_{jk\gamma}\Lambda^{p}_{\varkappa},$$
$$V_{\gamma\varkappa\iota}=v_{ijk}\Lambda^{i}_{\gamma}\Lambda^{j}_{\varkappa}\Lambda^{k}_{\iota},\ v_{i}=A^{\gamma\varkappa}\Lambda_{ij\gamma}\Lambda^{j}_{\varkappa},\qquad(3.12)$$
$$v^{i}=a^{ij}v_{j},\quad V_{\gamma}=v_{i}\Lambda^{i}_{\gamma},\ V^{\gamma}=V_{\varkappa}A^{\gamma\varkappa}.$$

Аналогично,подобъектом $\{\Gamma_0,\Gamma_1^{(1)},\Gamma_1^{(3)}\}$ охватываются :

$$\bar M_{\gamma\varkappa\iota},\ \bar m_{ij},\ \bar m_{i},\ \bar v_{ijk},\ \bar V_{\gamma\varkappa\iota},\ \bar v_{i},\ \bar v^{i},\ \bar V_{\gamma},\ \bar V^{\gamma}.\qquad(3.13)$$

Наконец,объект Γ_1 охватывает тензоры :

$$F_{\gamma\varkappa\iota}=a^{ik}\Lambda_{ij\gamma}\Lambda^{j}_{\varkappa}\Lambda_{k\iota},\ f^{i}_{j}=A^{\gamma\varkappa}\Lambda^{i}_{\gamma}\Lambda_{j\varkappa},\qquad(3.14)$$
$$f_{ij}=f^{k}_{(i}a_{|k|j)},$$

$$h_{ij}=a^{pq}B^{\gamma\varkappa}\Lambda_{ip\gamma}\Lambda_{jq\varkappa},\ H_{\gamma\varkappa}=A^{\tau s}B_{\gamma\tau}B_{s\varkappa},\ F_{\gamma\varkappa}=B^{\tau s}A_{\gamma\tau}A_{\varkappa s}.\qquad(3.14)$$

В отличие от объекта Γ_1 ,объект второго порядка Γ_2 позволяет найти в пространстве P_N инвариантно присоединенные геометрические образы,не инцидентные точке $P=\varphi(F)$.

Рассмотрим объекты,охватываемые подобъектом $\{\Gamma_0,\Gamma_2^{(2)}\}$ объекта Γ_2 где $\Gamma_2^{(2)}=\{\Gamma_1^{(2)},\Lambda^{i}_{\gamma\varkappa}\}$.Введем систему величин:

$$L_{\gamma}=a_{ij}P^{\tau s}\Lambda^{i}_{\gamma}\Lambda^{j}_{\tau s},\ \delta L_{\gamma}=L_{\varkappa}\Pi^{\varkappa}_{\gamma}-L_{\gamma}\Pi^{\circ}_{\circ}-2\Pi^{\circ}_{\gamma}.\qquad(3.15)$$

Квазитензор второго порядка L_{γ} определяет инвариантную гиперплоскость,не инцидентную точке P :

$$L_{\gamma}X^{\gamma}-2X^{\circ}=0.\qquad(3.16)$$

Не являющийся тензором объект второго порядка $\Gamma_2^{(2)}$ определяет совместно с квазитензором L_{γ} тензор второго порядка:

$$T^{i}_{\gamma\varkappa}=\Lambda^{i}_{\gamma\varkappa}-\tfrac{1}{2}\Lambda^{i}_{(\gamma}L_{\varkappa)},\qquad(3.17)$$

$$\delta T^{i}_{\gamma\varkappa}=-T^{j}_{\gamma\varkappa}\pi^{i}_{j}+T^{i}_{\iota\varkappa}\Pi^{\iota}_{\gamma}+T^{i}_{\gamma\iota}\Pi^{\iota}_{\varkappa}-T^{i}_{\gamma\varkappa}(2\Pi^{\circ}_{\circ}-\pi^{\circ}_{\circ}).\qquad(3.18)$$

Тензор $Q_{\gamma\varkappa}=a_{ij}P^{\tau s}T^{i}_{\gamma\tau}T^{j}_{\varkappa s}$ определяет инвариантный гиперконус:

$$Q_{\gamma\varkappa}X^{\gamma}X^{\varkappa}=0.\qquad(3.19)$$

Объект второго порядка $\{Q_{\gamma\varkappa},L_{\gamma}\}$ определяет однопараметрическое семейство инвариантных гиперквадрик :

$$(\lambda Q_{\gamma\varkappa}-\tfrac{1}{2}L_{\gamma}L_{\varkappa})X^{\gamma}X^{\varkappa}+2L_{\gamma}X^{\gamma}X^{\circ}-2(X^{\circ})^{2}=0\qquad(3.20)$$

Аналогичные построения можно провести,используя вместо $\Gamma_2^{(2)}$ другой объект: $\Gamma_2^{(3)}=\{\Gamma_1^{(3)},\Lambda_{i\gamma\varkappa}\}$.

Л и т е р а т у р а .

I.В.С.Малаховский,Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.Труды геометрического семинара,т.2,1969,ВИНИТИ.

2. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского математического общества, 2, 1953, ГИТТЛ.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

В.М.ОВЧИННИКОВ

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТОЧЕЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО.

Исследуется дифференцируемое локально биективное отображение f пространства Q квадратичных элементов [I] - n - мерного проективного пространства P_n в точечное N -мерное проективное пространство P_N $(N = C_{n+1}^2 + n - 1)$. Построен основной фундаментальный объект отображения f [2]. Выделена система тензоров и квазитензоров отображения f.

§ I. Система дифференциальных уравнений отображения f.

Отнесем пространства P_n и P_N к реперам

$$r \equiv \{\bar{A}_{\alpha'}\} \text{ и } R \equiv \{\bar{M}_{\mathcal{J}'}\} \quad (\alpha',\beta',\gamma' = 1,2,\ldots,n+1;\ \mathcal{J}',\mathfrak{J}',\varkappa',\ldots = 0,1,\ldots,N).$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений реперов r и R имеют вид:

$$d\bar{A}_{\alpha'} = \omega_{\alpha'}^{\beta'}\bar{A}_{\beta'},\ d\bar{M}_{\mathcal{J}'} = \Omega_{\mathcal{J}'}^{\varkappa'}\bar{M}_{\varkappa'}, \tag{1.1}$$

где формы $\omega_{\alpha'}^{\beta'}$, $\Omega_{\mathcal{J}'}^{\varkappa'}$ удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega_{\alpha'}^{\beta'} = \omega_{\alpha'}^{\gamma'}\wedge\omega_{\gamma'}^{\beta'},\ \mathcal{D}\Omega_{\mathcal{J}'}^{\mathfrak{J}'} = \Omega_{\mathcal{J}'}^{\varkappa'}\wedge\Omega_{\varkappa'}^{\mathfrak{J}'}. \tag{1.2}$$

Уравнения квадратичного элемента q пространства P_n запишутся в виде:

$$a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = 0,\ x^{n+1} = 0 \quad (\alpha,\beta,\gamma = 1,2,\ldots,n), \tag{1.3}$$

$$\det(a_{\alpha\beta}) = 1. \tag{1.4}$$