3. *Шевченко Ю.И.* Аффинная, коаффинная и линейная фактор-группы в подгруппе проективной группы // Проблемы мат. и физ. наук. Калининград, 2002. С. 38—39.

4. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.

5. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

O. Omelyan

THE TORSION OF AFFINE-GROUP CONNECTION
ON THE DISTRIBUTION OF PLANES
IN THE PROJECTIVE SPACE

In many-dimensional projective space the distribution of planes is considered. The main bundle is associated with the distribution, in which the group connection including affine-group subconnection is given. The object of torsion of affine-group connection is entered. It is shown, the torsion object is tensor and contains a number of subtensors.

УДК 514.75

К.В. Полякова

(Российский государственный университет им. И. Канта)

О ЛЕММЕ Г.Ф. ЛАПТЕВА

Дано подробное доказательство обобщенной леммы Э. Картана (леммы Г.Ф. Лаптева). Из доказательства вытекает следствие: альтернации форм, являющихся коэффициентами при базисных формах в результате применения леммы, сравнимы с нулем по модулю базисных форм.

Лемма Лаптева. *Пусть для p-форм* $\overset{p}{\theta}_\alpha$ *и линейно независимых 1-форм* ω^α ($\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^r \neq 0$, $\alpha = \overline{1, r}$) *имеет место равенство*

$$\overset{p}{\theta}_\alpha \wedge \omega^\alpha = 0. \tag{1}$$

Тогда

$$\overset{p}{\theta}_\alpha = \omega^\beta \wedge \overset{p-1}{\theta}_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

причем $\overset{p-1}{\theta}_{\alpha\beta} \wedge \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = 0$.

Доказательство. Дополним формы ω^α 1-формами ω^i ($i = \overline{r+1, n}$) до базиса $\omega^I = \{\omega^\alpha, \ \omega^i\}$, $I = \overline{1, n}$. Разложим формы $\overset{p}{\theta}_\alpha$ по базису ω^I: $\overset{p}{\theta}_\alpha = a_{\alpha I_1 \ldots I_p} \omega^{I_1 \ldots I_p}$, где используется обозначение $\omega^{I_1 \ldots I_p} = \omega^{I_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{I_p}$. С учетом разбиения индекса $I = \{\alpha, i\}$ получим

$$\overset{p}{\theta}_\alpha = a_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_p} \omega^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} + a_{\alpha\sigma(\alpha_1 i_2 \ldots i_p)} \omega^{\sigma(\alpha_1 i_2 \ldots i_p)} + \tag{3}$$
$$+ \sum_{s=2}^{p-1} a_{\alpha\sigma(\alpha_1 \ldots \alpha_s i_{s+1} \ldots i_p)} \omega^{\sigma(\alpha_1 \ldots \alpha_s i_{s+1} \ldots i_p)} + a_{\alpha i_1 \ldots i_p} \omega^{i_1 \ldots i_p}.$$

Символ $\sigma(\alpha_1 \ldots \alpha_s i_{s+1} \ldots i_p)$ означает перестановку между группами индексов серий α и i, причем внутри одной группы индексы не образуют инверсий. Например:

$$a_{\alpha\sigma(\alpha_1\alpha_2 i_3 i_4)} = a_{\alpha\alpha_1\alpha_2 i_3 i_4} + a_{\alpha\alpha_1 i_3 \alpha_2 i_4} + a_{\alpha\alpha_1 i_3 i_4 \alpha_2} + a_{\alpha i_3 \alpha_1 \alpha_2 i_4} +$$
$$+ a_{\alpha i_3 \alpha_1 i_4 \alpha_2} + a_{\alpha i_3 i_4 \alpha_1 \alpha_2}.$$

Используем известное

Утверждение. *Для p-форм справедлива формула*

$$\sum C_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \omega^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{\alpha_p} = p! \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_p} C_{[\alpha_1 \ldots \alpha_p]} \omega^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{\alpha_p},$$

причем форма $\sum C_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \omega^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{\alpha_p}$ *равна нулю, если проальтернированные коэффициенты* $C_{[\alpha_1 \ldots \alpha_p]}$ *равны нулю.*

Приведем подобные слагаемые в разложении (3):

$$
\begin{aligned}
\overset{p}{\theta}_{\alpha} = {} & p!\sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_p} a_{\alpha[\alpha_1\ldots\alpha_p]}\omega^{\alpha_1\ldots\alpha_p} + \\
& +(p-1)!\sum_{i_2<\ldots<i_p}(-1)^t a_{\alpha\sigma(\alpha_1[i_2\ldots i_p])}\omega^{\alpha_1 i_2\ldots i_p} + \\
& +\sum_{s=2}^{p-1}\sum_{\substack{\alpha_1<\ldots<\alpha_s\\ i_{s+1}<\ldots<i_p}}(-1)^t(p-s)!s!a_{\alpha\sigma([\alpha_1\ldots\alpha_s][i_{s+1}\ldots i_p])}\omega^{\alpha_1\ldots\alpha_s i_{s+1}\ldots i_p} + \\
& +p!\sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{\alpha[i_1\ldots i_p]}\omega^{i_1\ldots i_p},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где t — число транспозиций в перестановке σ, квадратные скобки означают альтернирование по всем входящим в них индексам. Символ σ по-прежнему означает перестановку с последующей альтернацией по указанным индексам.

Подставим разложение (3) в равенство (1) и раскроем скобки:

$$
\begin{aligned}
& a_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_p}\omega^{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_p} + a_{\alpha\sigma(\alpha_1 i_2\ldots i_p)}\omega^{\alpha\sigma(\alpha_1 i_2\ldots i_p)} + \\
& +\sum_{s=2}^{p-1} a_{\alpha\sigma(\alpha_1\ldots\alpha_s i_{s+1}\ldots i_p)}\omega^{\alpha\sigma(\alpha_1\ldots\alpha_s i_{s+1}\ldots i_p)} + a_{\alpha i_1\ldots i_p}\omega^{\alpha i_1\ldots i_p} = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Приведем в (5) подобные:

$$
\begin{aligned}
& (p+1)!\sum_{\alpha<\alpha_1<\ldots<\alpha_p} a_{[\alpha\alpha_1\ldots\alpha_p]}\omega^{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_p} + \\
& +(p-1)!\sum_{\substack{\alpha<\alpha_1\\ i_2<\ldots<i_p}}(-1)^t a_{[\alpha\sigma(\alpha_1][i_2\ldots i_p])}\omega^{\alpha\alpha_1 i_2\ldots i_p} + \\
& +\sum_{s=2}^{p-1}\sum_{\substack{\alpha<\alpha_1<\ldots<\alpha_s\\ i_{s+1}<\ldots<i_p}}(-1)^t(p-s)!(s+1)!a_{[\alpha\sigma(\alpha_1\ldots\alpha_s][i_{s+1}\ldots i_p])}\omega^{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_s i_{s+1}\ldots i_p} + \\
& +p!\sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{\alpha[i_1\ldots i_p]}\omega^{i_1\ldots i_p} = 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Из (6) следует, что

$$a_{[\alpha\alpha_1\dots\alpha_p]}=0,\quad (-1)^t a_{[\alpha\sigma(\alpha_1][i_2\dots i_p])}=0,$$

$$(-1)^t a_{[\alpha\sigma(\alpha_1\dots\alpha_s][i_{s+1}\dots i_p])}=0,\quad a_{\alpha[i_1\dots i_p]}=0. \tag{7}$$

С учетом (7_4) разложение (4) принимает вид:

$$\overset{p}{\theta}_\alpha = p!\sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_p} a_{\alpha[\alpha_1\dots\alpha_p]}\omega^{\alpha_1\dots\alpha_p} +$$

$$+(p-1)!\sum_{i_2<\dots<i_p}(-1)^t a_{\alpha\sigma(\alpha_1[i_2\dots i_p])}\omega^{\alpha_1 i_2\dots i_p} + \tag{8}$$

$$+\sum_{s=2}^{p-1}\sum_{\substack{\alpha_1<\dots<\alpha_s\\ i_{s+1}<\dots<i_p}}(-1)^t(p-s)!s!a_{\alpha\sigma([\alpha_1\dots\alpha_s][i_{s+1}\dots i_p])}\omega^{\alpha_1\dots\alpha_s i_{s+1}\dots i_p}.$$

Из (8) следует, что каждое слагаемое формы $\overset{p}{\theta}_\alpha$ содержит формы ω^α, т.е. выполняется (1). Однако перегруппировку удобнее осуществлять не в (8), а с учетом (7_4) в выражении (3), где еще не приведены подобные:

$$\overset{p}{\theta}_\alpha = a_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_p}\omega^{\alpha_1\dots\alpha_p} + a_{\alpha\sigma(\alpha_1 i_2\dots i_p)}\omega^{\sigma(\alpha_1 i_2\dots i_p)} + \qquad (8\ □)$$

$$+\sum_{s=2}^{p-1}a_{\alpha\sigma(\alpha_1\dots\alpha_s i_{s+1}\dots i_p)}\omega^{\sigma(\alpha_1\dots\alpha_s i_{s+1}\dots i_p)}.$$

В (8 □) вынесем ω^{α_1} за общую скобку:

$$\overset{p}{\theta}_\alpha = \omega^{\alpha_1}\wedge(a_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_p}\omega^{\alpha_2\dots\alpha_p} + (-1)^t a_{\alpha\sigma(\alpha_1 i_2\dots i_p)}\omega^{i_2\dots i_p} +$$

$$+(-1)^t\sum_{s=2}^{p-1}a_{\alpha\sigma(\alpha_1\dots\alpha_s i_{s+1}\dots i_p)}\omega^{\sigma(\alpha_2\dots\alpha_s i_{s+1}\dots i_p)}).$$

Таким образом, получили формы:

$$\overset{p\text{-}1}{\theta}_{\alpha\alpha_1} = a_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_p}\omega^{\alpha_2\dots\alpha_p} + (-1)^t a_{\alpha\sigma(\alpha_1 i_2\dots i_p)}\omega^{i_2\dots i_p} + \tag{9}$$

$$+(-1)^t\sum_{s=2}^{p-1}a_{\alpha\sigma(\alpha_1\dots\alpha_s i_{s+1}\dots i_p)}\omega^{\sigma(\alpha_2\dots\alpha_s i_{s+1}\dots i_p)}.$$

Лемма доказана. Из доказательства вытекает

Следствие. *Альтернации форм* $\overset{p\text{-}1}{\theta}_{[\alpha\alpha_1]}$, *являющихся коэффициентами при базисных формах* ω^α *в результате применения леммы Лаптева, сравнимы с нулем по модулю базисных форм, т. е.*

$$\overset{p\text{-}1}{\theta}_{[\alpha\alpha_1]} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^\alpha). \tag{10}$$

Доказательство. Приведем в (9) подобные:

$$\begin{aligned}\overset{p\text{-}1}{\theta}_{\alpha\alpha_1} = {} & (p-1)! \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_p} a_{\alpha\alpha_1[\alpha_2\ldots\alpha_p]}\omega^{\alpha_2\ldots\alpha_p} + \\ & + (p-1)! \sum_{i_2<\ldots<i_p} (-1)^t a_{\alpha\sigma(\alpha_1[i_2\ldots i_p])}\omega^{i_2\ldots i_p} + \\ & + \sum_{s=2}^{p-1} \sum_{\substack{\alpha_1<\ldots<\alpha_p \\ i_2<\ldots<i_p}} (p-s)!(s-1)!(-1)^t a_{\alpha\sigma(\alpha_1[\alpha_2\ldots\alpha_s][i_{s+1}\ldots i_p])}\omega^{\alpha_2\ldots\alpha_s i_{s+1}\ldots i_p}.\end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим формы $\overset{p\text{-}1}{\theta}_{[\alpha\alpha_1]}$:

$$\begin{aligned}\overset{p\text{-}1}{\theta}_{[\alpha\alpha_1]} = {} & (p-1)! \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_p} a_{[\alpha\alpha_1][\alpha_2\ldots\alpha_p]}\omega^{\alpha_2\ldots\alpha_p} + \\ & + (p-1)! \sum_{i_2<\ldots<i_p} (-1)^t a_{[\alpha\sigma(\alpha_1][i_2\ldots i_p])}\omega^{i_2\ldots i_p} + \\ & + \sum_{s=2}^{p-1} \sum_{\substack{\alpha_1<\ldots<\alpha_p \\ i_2<\ldots<i_p}} (p-s)!(s-1)!(-1)^t a_{[\alpha\sigma(\alpha_1][\alpha_2\ldots\alpha_s][i_{s+1}\ldots i_p])}\omega^{\alpha_2\ldots\alpha_s i_{s+1}\ldots i_p}.\end{aligned} \tag{12}$$

Выражение (12) с учетом (7_2) принимает вид:

$$\begin{aligned}\overset{p\text{-}1}{\theta}_{[\alpha\alpha_1]} = {} & (p-1)! \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_p} a_{[\alpha\alpha_1][\alpha_2\ldots\alpha_p]}\omega^{\alpha_2\ldots\alpha_p} + \\ & + \sum_{s=2}^{p-1} \sum_{\substack{\alpha_1<\ldots<\alpha_p \\ i_2<\ldots<i_p}} (p-s)!(s-1)!(-1)^t a_{[\alpha\sigma(\alpha_1][\alpha_2\ldots\alpha_s][i_{s+1}\ldots i_p])}\omega^{\alpha_2\ldots\alpha_s i_{s+1}\ldots i_p}.\end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку лучше выносить общие формы за скобку в том выражении, где еще не приведены подобные, то (13) представим как

$$\overset{p\text{-}1}{\theta}_{[\alpha\alpha_1]} = a_{[\alpha\alpha_1]\alpha_2\ldots\alpha_p}\omega^{\alpha_2\ldots\alpha_p} + \sum_{s=2}^{p-1} a_{[\alpha\sigma(\alpha_1]\alpha_2\ldots\alpha_s i_{s+1}\ldots i_p)}\omega^{\sigma(\alpha_2\ldots\alpha_s i_{s+1}\ldots i_p)} . \tag{14}$$

Из (14) следует:

$$\overset{p\text{-}1}{\theta}_{[\alpha\alpha_1]} = \omega^{\alpha_2} \wedge \Big(a_{[\alpha\alpha_1]\alpha_2\ldots\alpha_p}\omega^{\alpha_3\ldots\alpha_p} + \sum_{s=2}^{p-1} (\text{-}1)^t a_{[\alpha\sigma(\alpha_1]\alpha_2\ldots\alpha_s i_{s+1}\ldots i_p)}\omega^{\sigma(\alpha 3\ldots\alpha_s i_{s+1}\ldots i_p)}\Big) .$$

Таким образом, получили (10).

Для p = 2 результат доказан в [1].

Список литературы

1. *Малаховский В. С.* О голономности расслоения реперов на дифференцируемом многообразии // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2004. Вып. 35. С. 69—78.

K. Polyakova

ON G. F. LAPTEV’S LEMMA

The detailed proof of E. Cartan’s generalized lemma (G. F. Laptev’s lemma) is given. The consequence follows from the proof: alternations of the forms being coefficients at the basic forms as a result of application of the lemma, are comparable to zero modulo basic forms.