УДК 514.75

Е.П. Новикова

(Калининградский государственный университет)

ГИПЕРПОЛОСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В КОНФОРМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В n–мерном конформном пространстве C_n задано гиперполосное распределение. Построен репер, внутренним образом присоединенный к гиперполосному распределению в дифференциальной окрестности второго порядка.

Схема использования индексов такова:

$$\bar{I},\ \bar{J},\ \bar{K},\ldots = 0,\ldots,n+1;\ \ i,j,k,\ldots = 1,\ldots,m;\ \alpha,\beta,\gamma,\ldots = m+1,\ldots,n-1;$$

$$I,\ J,\ K,\ \ldots = 1,\ldots,n;\ a,b,c,\ldots = 1,\ldots,n-1;\ \ u,v,w,\ldots = m+1,\ldots,n.$$

Дифференциальный оператор ∇ действует обычным образом [4].

1. С каждой точкой A_o n–мерного конформного пространства C_n свяжем подвижной репер, состоящий из двух точек A_o, A_{n+1} и из n проходящих через них линейно независимых гиперсфер A_J . Обозначим скалярное произведение гиперсфер

$$(A_{\bar{J}}, A_{\bar{K}}) = g_{\bar{J}\bar{K}}. \qquad (1)$$

Учитывая инцидентность гиперсфер, имеем:

$$g_{oo} = g_{n+1,n+1} = g_{oI} = g_{n+1,\,I} = 0. \qquad (2)$$

Выберем нормировку вершин A_o, A_{n+1} таким образом, чтобы

$$g_{o,n+1} = 1. \qquad (3)$$

В дальнейшем будем рассматривать только собственно конформные пространства, для которых матрица $\| g_{IK} \|$ является невырожденной и положительно определенной:

$$\det \| g_{IK} \| \neq 0,\ g_{IK}g^{KJ} = \delta_I^J,\ \nabla g_{IK} = 0,\ \nabla g^{IK} = 0. \qquad (4)$$

Деривационные уравнения выбранного репера пространства C_n имеют вид:

$$dA_{\bar{J}} = \omega_{\bar{J}}^{\bar{K}} A_{\bar{K}}.$$

Так как в силу интерпретации Дарбу [1] группа G конформных преобразований пространства C_n изоморфна подгруппе проективных преобразований, оставляющих инвариантной гиперквадрику Q, то структурные уравнения конформного пространства C_n имеют вид:

$$d\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}} = \omega_{\bar{J}}^{\bar{L}} \wedge \omega_{\bar{L}}^{\bar{K}},$$

где

$$\omega^I \equiv \omega_o^I,\ \omega_{n+1}^o = \omega_o^{n+1} = \omega_o^o + \omega_{n+1}^{n+1} = 0,\ \ \omega_I^{n+1} + g_{IK}\,\omega^K = 0,\ \omega_I^o + g_{IK}\omega_{n+1}^K = 0. \qquad (5)$$

Соотношения (5) получены дифференцированием соотношений (1) с учетом (2), (3) и (4).

Определение 1. m-мерным элементом L^m конформного пространства C_n называется m-параметрическое многообразие гиперсфер, проходящих через точку M. Точка M называется центром элемента**.**

Из определения следует, что m-мерный элемент L^m можно задать с помощью точки M и m проходящих через нее линейно независимых гиперсфер $B_1,\ldots,B_m$.

Определение 2. Отображение Δ^m, которое каждой точке M пространства C_n ставит в соответствие m-мерный элемент $[M, B_1,\ldots,B_m]$, проходящий через эту точку, называется m-мерным распределением или просто m-распределением конформного пространства C_n [1], [2].

С каждым m-мерным распределением Δ^m инвариантно связано вполне ортогональное ему $(n-m)$–мерное распределение Δ^{n-m}, образованное элементом $[M, B_{m+1},\ldots,B_n]$, где гиперсферы $B_{m+1},\ldots,B_n$ ортогональны гиперсферам $B_1,\ldots, B_m$. Присоединим к m-мерному распределению $\Delta^m(M)$ подвижной репер $\{ A_J \}$ таким образом, чтобы $A_o \equiv M$ и гиперсферы A_i образовывали базис элемента $\Delta^m (A_o)$, а гиперсферы A_o, A_u образовывали базис элемента $\Delta^{n-m}(A_o)$ вполне ортогонального распределения Δ^{n-m}. Так как гиперсферы A_u ортогональны гиперсферам A_i, то скалярные произведения (A_i, A_u) равны нулю, т. е.

$$g_{iu}= 0. \tag{6}$$

Гиперсферы B_i разложим по базису A_o, A_i , A_u, A_{n+1}:

$$B_i = A_i + \nu_i^{\ u} A_u + \nu_i^{n+1} A_{n+1} + \nu_i^{\ o} A_o.$$

Из условия инцидентности $(A_0, B_i) = 0$ следует $\nu_i^{n+1} = 0$. В силу ортогональности гиперсфер B_i и B_u , т.е. $(B_i, B_u) = 0$, имеем: $\nu_i^{\ u} = 0$ и, следовательно, $B_i = A_i + \nu_i^{\ o} A_o$.

Преобразования, оставляющие инвариантным m-мерный элемент $\Delta^m(A_o)$, образуют подгруппу G^m группы G конформных преобразований конформного пространства C_n, называемую стационарной подгруппой элемента $\Delta^m(A_o)$. Так как элемент $\Delta^m(A_o)$ однозначно определяет ортогональный к нему элемент $\Delta^{n-m}(A_o)$, то стационарные подгруппы G^m и G^{n-m} элементов $\Delta^m(A_o)$ и $\Delta^{n-m}(A_o)$ совпадают.

При преобразованиях подгруппы G^m точка A_o остается неподвижной, поэтому выполняется условие

$$\delta A_0 = \pi_o^{\ o} A_0. \tag{7}$$

В силу деривационных уравнений конформного репера последнее равенство равносильно уравнениям

$$\pi^i = 0,\ \pi^u= 0. \tag{8}$$

Дифференциальные уравнения неподвижности гиперсфер B_i имеют вид:

$$\nabla_\delta \nu_i^{\ o} = 0, \tag{9}$$

$$\pi_i^{\ u} = 0. \tag{10}$$

Распределение Δ^m каждой точке A_o ставит в соответствие m-мерный элемент $\Delta^m(A_o)$, поэтому из условий (8) неподвижности точки A_0 должны следовать условия (10) неподвижности элемента $\Delta^m(A_o)$. Значит, дифференциальные уравнения m-мерного распределения Δ^m имеют вид:

$$\omega^u_i = \Lambda^u_{iK}\,\omega^K. \quad (11)$$

Поле квазитензора $\{\nu_i^0\}$ в силу (9) задает поле инвариантных m-мерных сфер $S_m(A_o)$. Так как стационарные подгруппы G^m и G^{n-m} элементов $\Delta^m(A_o)$ и $\Delta^{n-m}(A_o)$ совпадают, то совпадают и дифференциальные уравнения распределений Δ^m и Δ^{n-m}. Их можно записать в виде (11) или следующим образом :

$$\omega^i_u = \Lambda^i_{uK}\,\omega^K \quad (12)$$

Теперь зададим элемент гиперраспределения Δ^{n-1} точкой A_o и независимыми гиперсферами B_a. Рассуждая аналогичным образом, запишем дифференциальные уравнения инвариантности точки A_o и гиперсфер $B_a = A_a + \nu_a^o A_o$ в виде:

$$\nabla_\delta\, \nu_a^o = 0,\ \ \pi_a^n = 0 \quad (13)$$

Поле тензора $\{\nu_a^o\}$ задает поле инвариантных гиперсфер B_a, а дифференциальные уравнения гиперраспределения $\Delta^{n-1}(A_o)$ имеют вид:

$$\omega^n_a = \Lambda^n_{aK}\,\omega^K. \quad (14)$$

Так как стационарные подгруппы G^{n-1} и G^1 элементов $\Delta^{n-1}(A_o)$ и $\Delta^1(A_o)$ совпадают, то дифференциальные уравнения гиперраспределения можно также записать в виде:

$$\omega_n^a = \Lambda_{nK}^{\ a}\,\omega^K. \quad (15)$$

Определение 3. Гиперполосным распределением ***H*** в конформном пространстве C_n называется пара распределений Δ^m и Δ^{n-1} таких, что в каждой точке $A_o\in C_n$ выполняются условия инцидентности следующего вида:

$$A_o \in \Delta^m \subset \Delta^{n-1}\ . \quad (16)$$

Из ортогональности гиперсфер B_i и B_α, а также гиперсфер B_n и B_a, получаем, соответственно, соотношения:

$$g_{nu} = g_{ni} = 0. \quad (17)$$

С учетом инцидентности (16), уравнения (12) и (15) примут вид:

$$\omega_i^n = \Lambda^n_{iK}\omega^K,\ \omega_i^\alpha = \Lambda^\alpha_{iK}\omega^K,\ \omega_\alpha^n = \Lambda^n_{\alpha K}\omega^K\ . \quad (18)$$

При условиях (6), (17) и нормировке

$$g_{nn} = 1 \quad (19)$$

уравнения (5) запишутся в виде:

$$\omega_{n+1}^{\ o} = \omega_o^{\ n+1} = \omega_o^{\ o} + \omega_{n+1}^{\ n+1} = 0,\ \omega_i^{n+1} + g_{ij}\,\omega^j = 0,\ \omega_\alpha^{\ o} + g_{\alpha\beta}\omega_{n+1}^{\ \beta} = 0,\ \omega_n^{\ o} = -\,\omega^n_{\ n+1},$$
$$\omega_n^{\ n+1} = -\,\omega^n,\ \omega_\alpha^{\ n+1} + g_{\alpha\beta}\,\omega^\beta = 0,\ \omega_i^{\ o} + g_{ij}\,\omega_{n+1}^{\ j} = 0,\ g_{ij}\,\omega_\alpha^{\ j} + g_{\alpha\beta}\,\omega_i^{\ \beta} = 0, \quad (20)$$

причем $\nabla g_{ij} = 0$, $\nabla g_{\alpha\beta} = 0$.

Продолжая уравнения (18) и учитывая (20), получим:

$$\nabla\Lambda^\alpha_{\ ij} - g_{ij}\omega^\alpha_{\ n+1} = \Lambda^\alpha_{\ ija}\omega^a,\ \nabla\Lambda^\alpha_{\ i\beta} - \delta^\alpha_\beta\omega_i^{\ o} = \Lambda^\alpha_{\ i\beta a}\omega^a,\ \nabla\Lambda^\alpha_{\ in} = \Lambda^\alpha_{\ ina}\omega^a,$$
$$\nabla\Lambda^n_{\ ij} - g_{ij}\omega^n_{\ n+1} = \Lambda^n_{\ ija}\omega^a,\ \nabla\Lambda^n_{\ i\beta} = \Lambda^n_{\ i\beta a}\omega^a,\ \ \nabla\Lambda^n_{\ in} + \omega^o_{\ i} = \Lambda^n_{\ ina}\omega^a, \quad (21)$$
$$\nabla\Lambda^n_{\ \alpha i} = \Lambda^n_{\ \alpha ia}\,\omega^a,\ \ \nabla\Lambda^n_{\ \alpha\beta} - g_{\alpha\beta}\,\omega^n_{\ n+1} = \Lambda^n_{\ \alpha\beta a}\,\omega^a,\ \nabla\Lambda^n_{\ \alpha n} + \omega^o_{\ \alpha} = \Lambda^n_{\ \alpha na}\,\omega^a.$$

Таким образом, уравнения (18), (21) и соотношения (2), (3), (6), (17), (19), (20) задают гиперполосное распределение $\boldsymbol{H} \subset C_n$.

Система величин $\Gamma_1 = \{g_{ij},\ g_{\alpha\beta},\ \Lambda^n_{\ ia},\ \Lambda^\alpha_{\ ia},\ \Lambda^n_{\ \alpha a}\}$ является фундаментальным геометрическим объектом первого порядка [3]. Резюмируя, приходим к теореме:

Теорема 1. *В дифференциальной окрестности первого порядка гиперполосное распределение $\boldsymbol{H} \subset C_n$ задается дифференциальными уравнениями (18), (21) и соотношениями (2), (3), (6), (17), (19), (20).*

2.С помощью фундаментальных геометрических объектов первого порядка построим геометрические объекты

$$\lambda^\alpha = 1/m\, g^{ij} \Lambda^\alpha_{ij},\ \lambda^i = 1/(n\text{-}m\text{-}1)\, g^{\alpha\beta} \Lambda^i_{\alpha\beta},\ \lambda^n = 1/m\, g^{ij} \Lambda^n_{ij},$$

удовлетворяющие системам дифференциальных уравнений

$$\lambda^\alpha + 2\lambda^\alpha \omega_o^o + g^{\alpha\beta} \omega_\beta^o = \lambda_a^\alpha \omega^a, \quad (22)$$

$$\nabla \lambda^i + 2\lambda^i \omega_o^o + g^{ij} \omega_j^o = \lambda_a^i \omega^a, \quad (23)$$

$$\nabla \lambda^n + 2\lambda^n \omega_o^o + \omega_n^o = \lambda_a^n \omega^a. \quad (24)$$

Объекты λ^α, λ^i, λ^n позволяют построить новые геометрические объекты

$$\lambda_\alpha = 1/(n\text{-}m\text{-}1)\, g_{\alpha\beta} \lambda^\beta,\ \lambda_i = 1/m\, g_{ij} \lambda^i,\ \lambda_n = -\,1/m\, g_{ik} \Lambda_n^{ik}\ \ (\Lambda_n^{ik} = g^{ij} \Lambda_{nj}^k),$$

которые при фиксированных главных параметрах удовлетворяют соответственно системам дифференциальных уравнений

$$\nabla_\delta \lambda_\alpha + \pi_\alpha^0 = 0,\ \nabla_\delta \lambda_i + \pi_i^0 = 0,\ \nabla_\delta \lambda_n + \pi_n^0 = 0. \quad (25)$$

С помощью полученных геометрических объектов λ_α, λ_i, λ_n построим инвариантные пучки касательных и нормальных гиперсфер распределения Δ^m:

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha A_0,\quad B_i = A_i + \lambda_i A_0,\quad B_n = A_n + \lambda_n A_0,$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\delta B_\alpha = \pi_\alpha^\beta B_\beta,\ \delta B_i = \pi_i^j B_j,\ \delta B_n = \pi_n^n B_n.$$

Таким образом, геометрические объекты λ_α, λ_i и λ_n определяют сферы [B_{m+1}, …, B_{n-1}], [B_1, …, B_m] и [B_n], инвариантные относительно преобразований подгруппы G^m, внутренним образом связанные с распределением Δ^m в дифференциальной окрестности первого порядка. Гиперсферы B_α, B_i и B_n имеют две общие точки

$$B_0 = A_0,\ B_{n+1} = -A_{n+1} + \lambda^\alpha A_\alpha + \lambda^i A_i + \lambda^n A_n + \lambda^0 A_0,$$

где $\lambda^0 = -\ \lambda^K \lambda_K$. Так как пучки, определяемые сферами B_α, B_i и B_n, инвариантны, то будет инвариантна и точка B_{n+1}, по которой эти гиперсферы пересекаются. Гиперсферы B_α, B_i, B_n и точки B_0, B_{n+1} удовлетворяют соотношениям (2), (3), (6) и, следовательно, являются элементами инвариантного репера, связанного с точкой B_0 распределения Δ^m.

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности первого порядка к гиперполосному распределению* ***H*** *присоединяется инвариантный репер* $\{B_{\bar{J}}\}$, *внутренним образом связанный с этим распределением.*

Библиографический список

1. *Акивис М.А.* Конформно–дифференциальная геометрия многомерных поверхностей. М., 1964.

2. *Бронштейн Р.Ф.* К конформной теории многомерных распределений // Геометрия погруженных многообразий. М., 1983. С.17-25.

3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. № 2. С. 275-382.

4. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. 1 // Тр. геом. семинара. М., 1971. Т. 3. С. 49–94.

E.P. Novikova

HIPERSTRIP DISTRIBUTION IN CONFORMAL SPACE

In n-dimensional conformal space C_n hyperstrip distribution is given. The frame joined in inner manner to the hyperstrip distribution in the differential neighbourhood of 2-nd order is constructed.

УДК 514.75

К.В. Полякова

(Калининградский государственный университет)

ПОНЯТИЕ ПРОТОСВЯЗНОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Поверхность проективного пространства рассматривается как семейство точек. В расслоении, ассоциированном с поверхностью, с помощью оснащения Бортолотти задается центропроективная связность, содержащая линейную подсвязность. Вводятся формы, являющиеся комбинациями компонент форм линейной подсвязности с коэффициентами – компонентами фундаментального объекта 1-го порядка. Эти формы названы формами касательной линейной протосвязности в трех случаях: 1) подсвязность адаптирована поверхности; 2) формы ограничены на асимптотические линии; 3) при дополнительной канонизации репера, когда поверхность рассматривается как многообразие касательных плоскостей. В 1-м случае будем говорить об адаптированной протосвязности, во 2-м – об индуцированной протосвязности, в 3-м случае протосвязность становится касательной линейной связностью. Вводя формы протосвязности в структурные уравнения базисных форм поверхности, находим выражение для объекта кручения протосвязности. Кручение индуцированной протосвязности равно нулю. С помощью проективно-ковариантного дифференциала доказано: касательное направление переносится параллельно в индуцированной касательной линейной протосвязности, если его точка пересечения с нормалью 2-го рода, порожденной гиперплоскостью Бортолотти, смещается вдоль этого направления.