$$\Theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta,\gamma}\Omega^{\gamma} \qquad (2.7)$$

Система величин $\Gamma_0 = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta,\gamma}\}$ -образует внутренний фундаментальный объект дифференцируемого отображения f. Компоненты внутреннего фундаментального объекта $\Lambda_{\alpha\beta,\gamma}$ связаны соотношением

$$a^{\alpha\beta}\Lambda_{\alpha\beta,\gamma} = 0, \quad a^{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}.$$

Осуществляя продолжение системы (2.7), получим внутренний фундаментальный объект

$$\Gamma_1 = \{a_{\alpha\beta}; \Lambda_{\alpha\beta,\gamma}; \Lambda_{\alpha\beta,\gamma\kappa}\}.$$

Доказано, что он является основным.

Системы величин

$$n_{\gamma\kappa} = a^{\alpha\beta}\Lambda_{\alpha\beta,\gamma\kappa}; \quad b_{\alpha\beta} = n^{\gamma\kappa}\cdot\Lambda_{\alpha\beta,\gamma\kappa},$$

$$m_{\gamma y} = a^{\alpha\beta}a^{pq}\Lambda_{\alpha\beta,\gamma}\Lambda_{pq,y}; \quad c_{\gamma} = b^{\alpha\beta}\Lambda_{\alpha\beta,\gamma}$$

образуют тензоры соответствующей валентности.

Л и т е р а т у р а

1. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып.3, Труды Томского университета, т.168, стр.28-42, 1963.

2. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского математического общества, 2, 1953, ГИТ

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.

Г.Л.СВЕШНИКОВА

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается конгруэнция кривых второго порядка (коник), две фокальные поверхности которой вырождаются в линии (конгруэнции F). Найдены геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией F, исследованы некоторые её подклассы.

§ I. Конгруэнции F.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнцией F называется конгруэнция кривых второго порядка, обладающая следующими свойствами: I) существуют две фокальные поверхности (A_i) $(i,j,\kappa = 1,2)$, вырождающиеся в линии, 2) касательные ℓ_i к линиям (A_i) в точках A_i не инцидентны плоскости коники, 3) прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) не вырождается в линейчатую поверхность.

Отнесем конгруэнцию F к реперу $R = \{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4\}$, где A_3 - полюс прямой A_1A_2 относительно коники, а A_4 - точка на прямой ℓ, проходящей через A_3 и пересекающей прямые ℓ_i.

Инфинитезимальные перемещения репера R определяются деривационными формулами

$$d\bar{A}_{\alpha} = \omega^{\beta}_{\alpha}\bar{A}_{\beta} \quad (\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3,4), \qquad (1.1)$$

причем пфаффовы формы ω^{β}_{α} удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (1.2)$$

и эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \qquad (1.3)$$

Уравнения коники относительно этого репера записываются в виде :

$$(x^3)^2 - 2\rho x^1 x^2 = 0,\ x^4 = 0,\ \rho \neq 0. \qquad (1.4)$$

Для определения фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции коник [I] имеем систему :

$$(x^3)^2 - 2\rho x^1 x^2 = 0,\ x^4 = 0,\ x^\kappa \omega_\kappa + x^3 \omega_3^4 = 0,$$
$$\rho[(x^1)^2\omega_1^2 + (x^2)^2\omega_2^1] + \tfrac{1}{2}(x^3)^2\Delta\rho + x^3[x^1(-\omega_1^3 + \rho\omega_3^2) + x^2(-\omega_2^3 + \rho\omega_3^1)] = 0, \qquad (1.5)$$

где

$$\omega_i = \omega_i^4,\ \ \Delta\rho = \omega_\kappa^\kappa - 2\omega_3^3 - d\ln\rho. \qquad (1.6)$$

Формы Пфаффа

$$\omega_i,\ \omega_i^j,\ \omega_i^3,\ \omega_3^i,\ \omega_3^4,\ \omega_4^i,\ \Delta\rho \qquad (1.7)$$

являются главными формами конгруэнции. Так как касательные к линиям (A_i) не лежат в плоскости коники и A_i -фокальные точки коники, то

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{ji}\omega_i. \qquad (1.8)$$

Здесь и в дальнейшем считаем, что $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. Из условия 3 определения I вытекает:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0. \qquad (1.9)$$

Следовательно, формы Пфаффа ω_i можно принять за первичные независимые формы конгруэнции коник. Остальные формы (I.7) линейно через них выражаются:

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{ji}\omega_i,\ \ \omega_i^3 = \Gamma_i^{3\kappa}\omega_\kappa,\ \omega_3^i = \Gamma_3^{i\kappa}\omega_\kappa,$$
$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4\kappa}\omega_\kappa,\ \ \omega_4^i = \Gamma_4^{i\kappa}\omega_\kappa,\ \Delta\rho = a^\kappa\omega_\kappa. \qquad (1.10)$$

Учитывая, что поверхности (A_i) вырождаются в линии, а вершина A_4 лежит на прямой ℓ, получаем соответственно :

$$\Gamma_i^{3j} = 0,\ \Gamma_i^{ji} = 0. \qquad (1.11)$$

При замыкании уравнения $\omega_i^j = 0$ получим

$$\Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{jj} + \Gamma_4^{jj} = 0. \qquad (1.12)$$

Т е о р е м а I. Конгруэнция F существует и определяется с произволом четырех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конгруэнция F определяется системой уравнений Пфаффа :

$$\omega_i^j = 0,\ \omega_i^3 = \Gamma_i^{3i}\omega_i,\ \omega_3^i = \Gamma_3^{i\kappa}\omega_\kappa,\ \omega_3^4 = \Gamma_3^{4\kappa}\omega_\kappa,$$
$$\omega_4^i = -\Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{ii}\omega_i + \Gamma_4^{ij}\omega_j,\ \ \Delta\rho = a^\kappa\omega_\kappa. \qquad (1.13)$$

Продифферинцировав внешним образом уравнения (I.13), получим систему квадратичных уравнений :

$$\Delta\Gamma_i^{3i}\wedge\omega_i = 0,\ \ \Delta\Gamma_3^{i\kappa}\wedge\omega_\kappa = 0,\ \Delta\Gamma_3^{4\kappa}\wedge\omega_\kappa = 0,$$
$$\Delta\Gamma_4^{i\kappa}\wedge\omega_\kappa = 0,\ \Delta a^\kappa\wedge\omega_\kappa = 0, \qquad (1.14)$$

где

$$\Delta\Gamma_i^{3i} = d\Gamma_i^{3i} + \Gamma_i^{3i}(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^3 - (\Gamma_i^{3i})^2\Gamma_3^{4j}\omega_j,$$
$$\Delta\Gamma_3^{ii} = d\Gamma_3^{ii} + \Gamma_3^{ii}(2\omega_i^i - \omega_3^3 - \omega_4^4) + [\Gamma_3^{ii}\Gamma_3^{4j}(\Gamma_j^{3j} - \Gamma_i^{3i}) + \Gamma_3^{4i}(\Gamma_4^{ij} + \Gamma_3^{ij}\Gamma_j^{3j})],$$
$$\Delta\Gamma_3^{ij} = d\Gamma_3^{ij} + \Gamma_3^{ij}(\omega_i^i + \omega_j^j - \omega_3^3 - \omega_4^4), \qquad (1.15)$$
$$\Delta\Gamma_3^{4i} = d\Gamma_3^{4i} + \Gamma_3^{4i}(\omega_i^i - \omega_3^3) + (-\Gamma_3^{4i}\Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{4j} + \Gamma_3^{ji})\omega_j,$$
$$\Delta\Gamma_4^{ij} = d\Gamma_4^{ij} + \Gamma_4^{ij}(\omega_i^i + \omega_j^j - 2\omega_4^4) - \Gamma_3^{ij}\omega_4^3,$$

$$\Delta a^i = da^i + a^i(\omega_i^i - \omega_4^4) + (3\Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{ij} + \Gamma_4^{ij} - a^i\Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{4j})\omega_j - 2\Gamma_3^{4i}\omega_4^3,$$

$$\Delta\Gamma_4^{ii} = -\Gamma_3^{ii}\Delta\Gamma_j^{3j} - \Gamma_j^{3j}\Delta\Gamma_3^{ii} + (\Gamma_3^{ij}\Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{4i} + 2\Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{ij} + \Gamma_3^{4j}\Gamma_3^{ii}\Gamma_j^{3j})\omega_j .$$

Замкнутая система (I.13),(I.14) – в инволюции и определяет конгруэнцию коник F с произволом четырех функций двух аргументов. Теорема доказана.

Из (I.13) следует, что при $\omega_i = 0$ точка A_i неподвижна, что геометрически характеризует координатную сеть $\omega_1\omega_2 = 0$ на всякой невырожденной поверхности, ассоциированной с конгруэнцией F.

Разрешая (I.14) по лемме Картана и фиксируя первичные параметры, получим :

$$\delta\Gamma_i^{3i} = \Gamma_i^{3i}(\pi_4^4 - \pi_3^3) - \pi_4^3, \quad \delta\Gamma_3^{ii} = \Gamma_3^{ii}(\pi_4^4 + \pi_3^3 - 2\pi_i^i),$$

$$\delta\Gamma_3^{ij} = \Gamma_3^{ij}(\pi_4^4 + \pi_3^3 - \pi_j^j - \pi_i^i), \quad \delta\Gamma_3^{4i} = \Gamma_3^{4i}(\pi_3^3 - \pi_i^i), \tag{1.16}$$

$$\delta\Gamma_4^{ij} = \Gamma_4^{ij}(2\pi_4^4 - \pi_j^j - \pi_i^i) + \Gamma_3^{ij}\pi_4^3, \quad \delta a^i = a^i(\pi_4^4 - \pi_i^i) + \Gamma_3^{4i}\pi_4^3,$$

$$\delta \ln p = \pi_k^k - 2\pi_3^3 .$$

Из (I.6) видно, что величины $p, \Gamma_3^{ii}, \Gamma_3^{ij}, \Gamma_3^{4i}$ являются относительными инвариантами. Условие $p = 0$ означает вырождение коники (I.4); условие $\Gamma_3^{ii} = 0$ характеризует конгруэнции коник со сдвоенной фокальной линией (A_j); условие $\Gamma_3^{ij} = 0$ определяет конгруэнции коник, у которых касательная к линии $\omega_i = 0$ на поверхности (A_3) пересекает прямую A_jA_4 ; условие $\Gamma_3^{4i} = 0$ характеризует конгруэнции, для которых прямая A_jA_3 содержит характеристическую точку плоскости коники. Исходя из системы (I.16), осуществим такую фиксацию репера :

$$\Gamma_k^{3k} = 0, \quad p = 1 . \tag{1.17}$$

Вершина A_4 при этом гармонически делит вместе с A_3 точки

$$\bar{B}_i = \Gamma_i^{3i}\bar{A}_3 + \bar{A}_4 , \tag{1.18}$$

являющиеся точками пересечения прямых ℓ_i с прямой ℓ. Две оставшиеся нормировки вершин репера осуществляются ниже при исследовании подклассов конгруэнции F.

С конгруэнцией F ассоциируются следующие основные геометрические образы.

I) Прямолинейная конгруэнция (A_iA_4). Второй фокус R_i луча этой конгруэнции и соответсвующее ему фокальное семейство определяются по формулам :

$$\bar{R}_i = \lambda\bar{A}_i + \mu\bar{A}_4, \quad \Gamma_i^{3i}\omega_4^j = 0, \tag{1.19}$$

где

$$\lambda\Gamma_i^{3i}\Gamma_4^{jj} + \mu(\Gamma_4^{3i}\Gamma_4^{jj} - \Gamma_4^{ji}\Gamma_4^{3j}) = 0 \tag{1.20}$$

2) Прямолинейная конгруэнция (A_3A_4). Фокусы $\bar{N} = \lambda\bar{A}_3 + \mu\bar{A}_4$ и торсы конгруэнции (A_3A_4) определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda^2(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}) - \mu\lambda(\Gamma_3^{12}\Gamma_4^{21} + \Gamma_4^{12}\Gamma_3^{21}) - \mu^2[(\Gamma_1^{31})^2\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} + \Gamma_4^{12}\Gamma_4^{21}] = 0, \tag{1.21}$$

$$\omega_3^1\omega_4^2 - \omega_3^2\omega_4^1 = 0 . \tag{1.22}$$

3) Фокальные поверхности конгруэнции, отличные от (A_i). Они определяются из уравнений:

$$(x^1)^4(\Gamma_3^{22})^2 - 2(x^1)^3x^2[\Gamma_3^{22}B_1 + (B_2)^2] + (x^1)^2(x^2)^2[(B_1)^2 - 2\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} + 4B_2B_3] + 2x^1(x^2)^3[\Gamma_3^{11}B_1 - (B_3)^2] + (x^2)^4(\Gamma_3^{11})^2 = 0, \tag{1.23}$$

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0 ,$$

где

$$B_1 = \Gamma_3^{21} - \Gamma_3^{12} - 2\Gamma_1^{31} + a^1\Gamma_3^{42} - a^2\Gamma_3^{41},$$

$$B_2 = \Gamma_3^{42}(\Gamma_3^{21} - \Gamma_1^{31}) - \tfrac{1}{2}a^2 - \Gamma_3^{41}\Gamma_3^{22},$$

$$B_3 = \Gamma_3^{41}(\Gamma_3^{12} + \Gamma_1^{31}) - \tfrac{1}{2}a^1 - \Gamma_3^{42}\Gamma_3^{11}.$$

§ 2. Конгруэнции F_o .

Определение 2. Конгруэнцией F_o называется онгруэнция F ,обладающая следующими свойствами:

1) существует расслоение от конгруэнции коник к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) [2],

2) существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) [3]

3) точка A_3 не является характеристической точкой плоскости коники.

Теорема 2. Существует два непересекающихся класса конгруэнций F_o :конгруэнции F_o' ,определяемые с произволом четырех функций одного аргумента и конгруэнции F_o'' ,определяемые с произволом одной функции двух аргументов.

Доказательство. В силу условий определения 2 для конгруэнции F_o имеют место следующие конечные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_4^{ii}+\Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{ii}=0,\ a^i\Gamma_3^{ij}-a^j\Gamma_3^{ii}-2(\Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{ij}-\Gamma_3^{4j}\Gamma_4^{ii})=0,\\ &2(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22}-\Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21})+\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}+\Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21}+\Gamma_4^{21}+\Gamma_4^{12}=0,\\ &\Gamma_2^{32}\Gamma_4^{21}-\Gamma_1^{31}\Gamma_4^{12}=0,\ \Gamma_3^{12}-\Gamma_3^{21}=0,\ -\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}+\Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21}+\Gamma_4^{12}-\Gamma_4^{21}=0.\end{aligned}\right\}\quad(2.1)$$

Так как прямые A_3A_4 конгруэнции F_o образуют двупараметрическое семейство ,то

$$\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22}-\Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}\neq 0 \qquad (2.2)$$

Из соотношений (I.I7),системы (2.I) и неравенства (2.2) следует что $\Gamma_i^{3i}=0$.Значит,

$$\omega_i^3=0. \qquad (2.3)$$

При замыкании уравнений (2.3) с учетом (I.I3) будем иметь :

$$\omega_4^3=0 \qquad (2.4)$$

Введем обозначения:

$$\Gamma_3^{11}=a,\ \Gamma_3^{22}=c,\ \Gamma_3^{12}=\Gamma_3^{21}=b,\ S=ac-b^2 \qquad (2.5)$$

Систему дифференциальных уравнений,определяющую конгруэнцию F_o, можно записать в виде :

$$\left.\begin{aligned} &\omega_i^j=0,\ \omega_i^3=0,\ \omega_3^1=a\omega_1+b\omega_2,\ \omega_3^2=b\omega_1+c\omega_2,\\ &\omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\ \omega_4^i=-S\omega_j,\ \omega_4^3=0,\\ &\omega_k^k-2\omega_3^3=2(b\omega_3^4+a\Gamma_3^{42}\omega_1+c\Gamma_3^{41}\omega_2).\end{aligned}\right\}\quad(2.6)$$

Положим :

$$\begin{aligned} &\Delta a=da+a(2\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_4^4)-S\Gamma_3^{41}\omega_2,\ \Delta b=db+b(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4),\\ &\Delta c=dc+c(2\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4)-S\Gamma_3^{42}\omega_1,\ \Delta\Gamma_3^{4i}=d\Gamma_3^{4i}+\Gamma_3^{4i}(\omega_i^i-\omega_3^3)\end{aligned}\qquad(2.7)$$

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (2.6),получаем:

$$dS=S(2\omega_4^4-\omega_2^2-\omega_1^1), \qquad (2.8)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta a\wedge\omega_1+\Delta b\wedge\omega_2=0,\ \Delta b\wedge\omega_1+\Delta c\wedge\omega_2=0,\\ &\Delta\Gamma_3^{4k}\wedge\omega_k=0,\ a\Delta\Gamma_3^{42}\wedge\omega_1+c\Delta\Gamma_3^{41}\wedge\omega_2=0\end{aligned}\right\}\quad(2.9)$$

Уравнение (2.8) после преобразования приводится к виду:

$$a\Delta c+c\Delta a-2b\Delta b-S(a\Gamma_3^{42}\omega_1+c\Gamma_3^{41}\omega_2+2b\omega_3^4)=0 \qquad (2.10)$$

Если a и c одновременно не равны нулю,то система (2.6),(2.9)- в инволюции и определяет конгруэнцию F_o' с произволом четырех функций одного аргумента

Если
$$a=c=0, \qquad (2.11)$$
то система уравнений (2,6) принимает вид :

$$\left.\begin{aligned} &\omega_i^j=0,\ \omega_i^3=0,\ \omega_3^i=b\omega_j,\ \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\ \omega_4^i=b^2\omega_j,\\ &\omega_4^3=0,\ \omega_k^k-2\omega_3^3=2b\omega_3^4\end{aligned}\right\}\quad(2.12)$$

Замыкая (2.I2),получим

$$\begin{aligned} &2db+b(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4)=0,\\ &\Delta\Gamma_3^{4k}\wedge\omega_k=0.\end{aligned}\qquad(2.13)$$

Система (2.I2),(2.I3) – в инволюции и определяет конгруэнции F_0'' с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 3. Касательные к линиям (A_i) конгруэнции F_0 пересекаются. Поверхность (A_4) является плоскостью, инцидентной прямой A_1A_2.

Доказательство непосредственно следует из соотношений (2.3), (2.4),(2.6) и деривационных формул репера.

Т е о р е м а 4. Линии (A_i) конгруэнции F_0 являются плоскими.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$d\bar{A}_i = \omega_i^i \bar{A}_i + \omega_i \bar{A}_4, \quad d\bar{A}_4 = \omega_4^4 \bar{A}_4 - s(\omega_2 \bar{A}_1 + \omega_1 \bar{A}_2), \qquad (2.14)$$

то для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(d^n \bar{A}_i \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_4) = 0, \qquad (2.15)$$

что и доказывает теорему.

Для конгруэнции F_0' можно осуществить такую нормировку вершин репера:

$$s = -1, \quad a = c. \qquad (2.16)$$

Тогда

$$b = \varepsilon\sqrt{a^2+1}, \quad \varepsilon = \pm 1. \qquad (2.17)$$

Для конгруэнции F_0'' нормируем вершины репера так, что

$$b = 1, \quad \Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{42}. \qquad (2.18)$$

Обозначим

$$\Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{42} = g, \quad \omega_1^1 = p\omega_1 + r\omega_2. \qquad (2.19)$$

Пусть P_i –фокусы луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4). Инвариант a конгруэнции F_0' определяется формулой

$$a = \frac{\varepsilon(1-x)}{2\sqrt{x}}, \qquad (2.20)$$

где

$$x = (A_3A_4; P_1P_2). \qquad (2.21)$$

Матрица компонент деривационных формул канонического репера конгруэнции F_0'' имеет вид :

$$\begin{bmatrix} p\omega_1 + r\omega_2 & 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & (\frac{1}{2}g - p)\omega_1 + (\frac{1}{2}g - r)\omega_2 & 0 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_1 & -\frac{3}{4}g(\omega_1+\omega_2) & g(\omega_1+\omega_2) \\ \omega_2 & \omega_1 & 0 & \frac{1}{4}g(\omega_1+\omega_2) \end{bmatrix}. \qquad (2.22)$$

Т е о р е м а 5. Все коники конгруэнции F_0'' принадлежат одному конусу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим конус Q с вершиной $\bar{A}_3 - \bar{A}_4$:

$$Q \equiv 2x^1x^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 - 2x^3x^4 = 0 \qquad (2.23)$$

Коника (I.4) принадлежит конусу Q. Используя деривационные формулы (2.22) и условия

$$d x^\alpha = -x^\beta \omega_\beta^\alpha + \Theta x^\alpha$$

стационарности точки, получим

$$dQ = 2(\Theta - \omega_3^4)Q.$$

Следовательно, конус Q, определяемый уравнением (2.23), является инвариантным конусом пространства P_3.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 7. Касательные к линиям $\omega_i = 0$ на поверхности (A_3) пересекают прямые A_iA_4.

Доказательство вытекает из соотношений :

$$((d\bar{A}_3)_{\omega_i=0}\, \bar{A}_3 \bar{A}_i \bar{A}_4) = 0$$

§ 3. Конгруэнции F_1.

О п р е д е л е н и е 3. Конгруэнцией F_1 называется конгруэнция F, которая I)обладает условиями I и 2 определения 2, 2) имеет точку A_3 характеристической точкой плоскости коники, 3)координатная сеть $\omega_i = 0$ не является асимптотической сетью на поверхности (A_3).

Т е о р е м а 8.Конгруэнция F_1 существует с произволом двух функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конгруэнция F_1 определяется системой уравнений Пфаффа :

$$\left.\begin{aligned} &\omega_i^j = 0, \ \ \omega_i^3 = 0, \ \ \omega_3^1 = a\omega_1 + b\omega_2, \ \ \omega_3^2 = b\omega_1 + c\omega_2, \\ &\omega_3^4 = 0, \ \ \omega_4^i = -S\omega_j, \ \ \omega_4^3 = 0, \ \ \omega_k^k - 2\,\omega_3^3 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

Принимая во внимание условие 3 определения 3,убеждаемся,что конгруэнция F_1 существует и определяется с произволом двух функций одного аргумента.

Для конгруэнции F_1 вершины репера можно пронормировать так, что

$$S = -1, \ \ a = c. \quad (3.2)$$

Обозначим

$$q\,\omega_1 + t\,\omega_2 = \omega_1^1. \quad (3.3)$$

Т е о р е м а 9.Двойные точки Ермолаева M_i [4] пары поверхностей (A_3) и (A_4) конгруэнции F_1 гармонически делят фокальные точки A_i коники.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Двойные точки Ермолаева M_i поверхностей (A_3) и (A_4) совпадают с точками пересечения касательных к линиям $\mathcal{L}_i$ [2],высекаемым на этих поверхностях торсами прямолинейной конгруэнции (A_3A_4).Для точек M_i получаем формулы:

$$\bar{M}_i = \bar{A}_j + (-1)^j \bar{A}_i, \quad (3.4)$$

что и доказывает теорему.

Для конгруэнции F_1 имеет место теорема 3.3 [2].Обозначим, как и в [2] ,буквами $F_{i,k}$–фокальные точки коники,отличные от A_i .Имеем :

$$\bar{F}_{i,k} = \bar{A}_j + (-1)^j \bar{A}_i + (-1)^k \sqrt{2(-1)^j}\,\bar{A}_3 \quad (3.5)$$

Т е о р е м а 10. Торсы прямолинейных конгруэнций $(F_{i,1}F_{i,2})$ и (A_3A_4),порожденных конгруэнцией F_1 ,соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Торсы прямолинейных конгруэнций определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} &\left(a + (-1)^i \varepsilon \sqrt{a^2+1}\right)\left[(\omega_1)^2 - (\omega_2)^2\right] = 0, \\ &a\left[(\omega_1)^2 - (\omega_2)^2\right] = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

С л е д с т в и е. Фокальные семейства конгруэнции F_1 , отличные от $\omega_i = 0$,соотвутствуют торсам прямолинейных конгруэнций $(F_{i,1}F_{i,2})$.

Л и т е р а т у р а.

I.В.С.Малаховский,Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве.Геометрический сборник,вып.3,Труды Томского университета,I963,I68,стр.43-53.

2.В.С.Малаховский,Конгруэнции коник,порожденные расслояемой парой C_ℓ .Печатается в данном сборнике.

3.С.П.Фиников,Теория пар конгруэнций.ГИТТЛ,М.,I956.

4.С.П.Фиников,Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева.Ученые записки МГПИ,I6,вып.3,I956.