$$q^{o}_{jk} = \overset{*}{\tau}{}^{uv}_{jk} \left(q^{m}_{tu}\, q^{t}_{vm} - q^{m}_{uv,m} - 2R^{m}_{uvm} \right).$$

Справедливо следующее

П р е д л о ж е н и е. В случае, когда тензор T^{im}_{jk} удовлетворяет условию (4) и, кроме того, условию

$$T^{tm}_{j[k} T^{ia}_{l]t} + T^{ta}_{j[k} T^{im}_{l]t} - T^{am}_{j[k}\delta^{i}_{l]} - T^{ma}_{j[k}\delta^{i}_{l]} + (n-1)T^{im}_{j[k}\delta^{a}_{l]} + \qquad (5)$$

$$+ (n-1)T^{ia}_{j[k}\delta^{m}_{l]} + n\,\delta^{m}_{j}\delta^{a}_{[k}\delta^{i}_{l]} + n\,\delta^{a}_{j}\delta^{m}_{[k}\delta^{i}_{l]} +$$

$$+ \left(\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{j[k}\delta^{i}_{l]} + T^{iq}_{j[k}\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{l]q}\right)\left(T^{sm}_{t(u}T^{ta}_{v)s} - n(n-1)\,\delta^{m}_{(u}\delta^{a}_{v)}\right) = 0,$$

а его ковариантные производные $T^{im}_{jk|l}$ по отношению к одной из аффинных связностей, определенных на многообразии, удовлетворяют условиям

$$T^{im}_{j[k|l]} - \left(\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{j[k}\delta^{i}_{l]} + T^{it}_{j[k}\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{l]t}\right)T^{sm}_{uv|s} = 0, \qquad (6)$$

то имеют место соотношения (3) (и, следовательно, величины R^{i}_{jkl} являются компонентами тензора).

3. Наиболее интересный подкласс обобщенных Т-связностей представляют нормальные обобщенные Т-связности, которые удовлетворяют условию $R^{m}_{jkm} = 0$ (одновременно предполагается, что имеют место условия (5) и (6)). Для нормальных обобщенных Т-связностей

$$q^{o}_{jk} = \overset{*}{\tau}{}^{uv}_{jk} \left(q^{m}_{tu}\, q^{t}_{vm} - q^{m}_{uv,m} \right).$$

Нормальная обобщенная Т-связность полностью определяется заданием объекта $(T^{im}_{jk}, q^{i}_{jk})$ и, следовательно, может быть ассоциирована (подобно нормальной Т-связности, которую мы рассматривали ранее [1]) с совокупностью аффинных связностей без кручения, получаемых друг из друга с помощью Т-преобразований (при соответствующих дополнительных условиях). Для любой такой аффинной связности можно построить следующий тензор R^{i}_{jkl}, который мы будем называть тензором Т-кривизны:

$$R^{i}_{jkl} = K^{i}_{jkl} + \frac{1}{n+1}\delta^{i}_{j}K_{[kl]} - \frac{1}{2(n+1)}\left(K_{j[k}\delta^{i}_{l]} + \delta^{i}_{[k}K_{l]j}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2(n+1)}\left(T^{ia}_{j[k}K_{l]a} + K_{a[k}T^{ia}_{l]j}\right) - \frac{1}{2}\left(T^{ia}_{j[k}\delta^{b}_{l]} + \delta^{a}_{j}\delta^{b}_{[k}\delta^{i}_{l]}\right)\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{ab}\left(K_{(uv)} + \frac{2}{n+1}T^{st}_{uv}K_{[st]}\right),$$

где K^{i}_{jkl} – тензор кривизны аффинной связности, K_{jk} – тензор Риччи (здесь исправлена неточность в последнем слагаемом, которая была допущена в [4]).

Имеет место следующая теорема, из которой следует инвариантность тензора Т-кривизны относительно Т-преобразований аффинной связности.

Т е о р е м а. Для всех аффинных связностей без кручения, которым соответствует общая нормальная обобщенная Т-связность, тензор Т-кривизны – один и тот же и совпадает с тензором кривизны нормальной обобщенной Т-связности.

Библиографический список

1. Р ы б н и к о в А.К. Об одном специальном типе дифференциально-геометрических структур (Т-связности)//Всесоюзная конференция по геометрии "в целом": Тез. докл. Новосибирск, 1987. С. 106.

2. Р ы б н и к о в А.К. Проективные и конформные нормали и связности//Изв. вузов. Математика. 1986. №1. С. 60–69.

3. Л а п т е в Г.Ф. Основные дифференциальные структуры на гладком многообразии//Тр. геометр. семинара/ВИНИТИ. М., 1966. Т. I. С. 139–189.

4. Р ы б н и к о в А.К. Обобщенные Т-связности//Всесоюзная геометр. конф.: Тез. сообщений. Кишинев, 1988. С. 273–274.

УДК 514.75

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ГРАФИКА ОДНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

А.А. Р ы л о в

(МГПИ им. В.И. Ленина)

В работе рассматриваются случаи частичного отображения p-мерных поверхностей, погруженных в евклидовы пространства E_n и $\bar{E}_n$, когда график отображения несет геодезические специального вида или допускает параллельное перенесение единичного векторного поля в нормальной связности по любому направлению.

I. В собственно евклидовом пространстве E_{2n} рассмотрим две вполне ортогональные евклидовы плоскости E_n и $\bar{E}_n$, имеющие общую точку O. Пусть V_p и $\bar{V}_p$ – гладкие поверхности в E_n и $\bar{E}_n$ соответственно. Диффеоморфизму f области $\Omega \subset V_p$ на область

$\bar{\Omega} \subset \bar{V}_p$ соответствует поверхность в пространстве E_{2n}

$$V_p^* = \{x \mid \vec{Ox} = \vec{Ox_1} + \vec{Ox_2},\ x_1 \in \Omega,\ x_2 = f(x_1) \in \bar{\Omega}\},$$

называемая графиком отображения f. На протяжении изложения

$$i,j,k = \overline{1,p};\quad a,b = \overline{p+1,n};\quad A,B = \overline{p+1,2n}.$$

Отнесем области $\Omega, \bar{\Omega}$ и график V_p^* соответственно к реперам $R^{x_1} = \{x_1, \vec{e}_i, \vec{e}_a\}$, $R^{x_2} = \{x_2, \vec{e}_{n+i}, \vec{e}_{n+a}\}$, $R^x = \{x, \vec{\mathcal{E}}_i, \vec{\mathcal{E}}_a, \vec{\mathcal{E}}_{n+i}, \vec{\mathcal{E}}_{n+a}\}$, где $\vec{e}_i \in T_p(x_1)$, $\vec{e}_{n+i} = f_{*x_1}(\vec{e}_i) \in T_p(x_2)$, $\vec{\mathcal{E}}_i = \vec{e}_i + \vec{e}_{n+i} \in T_p(x)$,

причем $T_p(x_1), T_p(x_2), T_p(x)$ -касательные плоскости к поверхностям $V_p, \bar{V}_p, V_p^*$ в соответствующих точках x_1, x_2, x, а векторы $\vec{e}_a$ и $\vec{e}_{n+a}$ составляют ортонормированные базисы ортогональных дополнений к $T_p(x_1)$ и $T_p(x_2)$ в пространствах E_n и $\bar{E}_n$ соответственно. Обозначаем: $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$; $\bar{\gamma}_{ij} = \vec{e}_{n+i} \cdot \vec{e}_{n+j}$, $g_{ij} = \vec{\mathcal{E}}_i \cdot \vec{\mathcal{E}}_j = \gamma_{ij} + \bar{\gamma}_{ij}$ метрические тензоры поверхностей $V_p, \bar{V}_p$ и V_p^* соответственно.

Векторы

$$\vec{\mathcal{E}}_{n+i} = \vec{e}_i - \gamma_{ij}\bar{\gamma}^{jk}\vec{e}_{n+k},\quad \vec{\mathcal{E}}_a = \vec{e}_a,\quad \vec{\mathcal{E}}_{n+a} = \vec{e}_{n+a} \tag{1}$$

лежат в ортогональном дополнении $N_{2n-p}(x)$ к плоскости $T_p(x)$ в пространстве E_{2n}. Деривационные формулы этих реперов имеют вид:

$$R^{x_1}:\ d\vec{x}_1 = \omega^i\vec{e}_i,\ d\vec{e}_i = \omega_i^j\vec{e}_j + \omega_i^a\vec{e}_a,\ d\vec{e}_a = \omega_a^i\vec{e}_i + \omega_a^b\vec{e}_b; \tag{2}$$

$$R^{x_2}:\ d\vec{x}_2 = \bar{\omega}^i\vec{e}_{n+i},\ d\vec{e}_{n+i} = \bar{\omega}_i^j\vec{e}_{n+j} + \bar{\omega}_i^a\vec{e}_{n+a},\ d\vec{e}_{n+a} = \bar{\omega}_a^i\vec{e}_{n+i} + \bar{\omega}_a^b\vec{e}_{n+b}; \tag{3}$$

$$R^x:\ d\vec{x} = \theta^i\vec{\mathcal{E}}_i,\ d\vec{\mathcal{E}}_i = \theta_i^j\vec{\mathcal{E}}_j + \theta_i^A\vec{\mathcal{E}}_A,\ d\vec{\mathcal{E}}_A = \theta_A^j\vec{\mathcal{E}}_j + \theta_A^B\vec{\mathcal{E}}_B. \tag{4}$$

Реперы R^{x_1}, R^{x_2}, R^x согласованы, что приводит к следующим соотношениям на формы:

$$\omega^i = \bar{\omega}^i = \theta^i, \tag{5}$$

$$\omega_i^k = \theta_i^k + \theta_i^{n+k},\qquad \bar{\omega}_i^k = \theta_i^k - \gamma_{je}\bar{\gamma}^{ek}\theta_i^{n+j}, \tag{6}$$

$$\omega_i^a = \theta_i^a,\qquad \bar{\omega}_i^a = \theta_i^{n+a}, \tag{7}$$

$$\omega_a^b = \theta_a^b,\qquad \theta_a^{n+b} = 0, \tag{8}$$

$$\omega_i^a = \theta_{n+i}^a,\qquad \theta_{n+i}^{n+a} = -\gamma_{ij}\bar{\gamma}^{jk}\bar{\omega}_k^a, \tag{9}$$

$$\theta_{n+i}^a = -\bar{g}_{ij}\theta_a^{n+j},\qquad \theta_{n+i}^{n+a} = -\bar{g}_{ij}\theta_{n+a}^{n+j}, \tag{10}$$

где $g_{ij} = \vec{\mathcal{E}}_{n+i}\cdot\vec{\mathcal{E}}_{n+j}$.

Продолжение уравнений Пфаффа поверхностей $V_p, \bar{V}_p, V_p^*$:

$$\omega^a = 0,\quad \bar{\omega}^a = 0,\quad \theta^a = 0,\ \theta^{n+i} = 0,\ \theta^{n+a} = 0$$

дает соотношения:

$$\omega_i^a = b_{ij}^a\omega^j,\quad b_{ij}^a = b_{ji}^a; \tag{11}$$

$$\bar{\omega}_i^a = \bar{b}_{ij}^a\omega^j,\quad \bar{b}_{ij}^a = \bar{b}_{ji}^a; \tag{12}$$

$$\theta_i^a = t_{ij}^a\theta^j,\ t_{ij}^a = t_{ji}^a;\quad \theta_i^{n+a} = t_{ij}^{n+a}\theta^j,\ t_{ij}^{n+a} = t_{ji}^{n+a}; \tag{13}$$

$$\theta_i^{n+k} = t_{ij}^{n+k}\theta^j,\quad t_{ij}^{n+k} = t_{ji}^{n+k}.$$

В силу формул (7) имеем: $b_{ij}^a = t_{ij}^a$; $\bar{b}_{ij}^a = t_{ij}^{n+a}$, т.е. среди $2n-p$ вторых квадратичных форм графика V_p^* формы $\Phi^a = t_{ij}^a\theta^i\theta^j$; $\Phi^{n+a} = t_{ij}^{n+a}\theta^i\theta^j$ соответственно перенесены с поверхностей V_p и $\bar{V}_p$ без изменения. Будем считать, что главные нормали поверхностей V_p и $\bar{V}_p$ в точках $x_1 \in \Omega$ и $x_2 = f(x_1)$ соответственно совпадают с ортогональными дополнениями $N_{n-p}(x_1)$ и $N_{n-p}(x_2)$.

2. Пусть линия γ^*: $\theta^i = \ell^i\theta$ (θ -I-форма: $\mathcal{D}\theta = \theta\wedge\theta_1$) является геодезической на графике V_p^*. Соприкасающаяся плоскость линии γ^* в точке $x \in V_p^*$ определяется следующим образом:

$$\Pi_2(x,\gamma^*) = [x, \vec{a}, (d\ell^i + \ell^j\theta_j^i)\vec{\mathcal{E}}_i + \ell^j\theta_j^a\vec{\mathcal{E}}_a + \ell^j\theta_j^{n+k}\vec{\mathcal{E}}_{n+k} + \ell^j\theta_j^{n+a}\vec{\mathcal{E}}_{n+a}],$$

где $\vec{a} = \ell^i\vec{\mathcal{E}}_i$. Приняв длину дуги линии в качестве параметра, имеем условие того, что линия $\gamma^* \subset V_p^*$ -геодезическая: $d\ell^i + \ell^j\theta_j^i = 0$.

Выделим следующие подслучаи:

1. Линию $\gamma^* \subset V_p^*$ назовем геодезической I рода, если в каждой точке $x \in \gamma^*$ $\Pi_2(x,\gamma^*)$ пересекает поднормаль $N'_{n-p}(x) = [x, \vec{\mathcal{E}}_a]$ по прямой.
2. Линию $\gamma^* \subset V_p^*$ назовем геодезической II рода, если в каждой точке $x \in \gamma^*$ $\Pi_2(x,\gamma^*)$ пересекает поднормаль $N''_{n-p}(x) = [x, \vec{\mathcal{E}}_{n+a}]$ по прямой.
3. Линию $\gamma^* \subset V_p^*$ назовем геодезической III рода, если в каждой точке $x \in \gamma^*$ $\Pi_2(x,\gamma^*)$ пересекает поднормаль $N_p(x) = [x, \vec{\mathcal{E}}_{n+k}]$ по прямой.

Справедлив критерий геодезических I-III родов на графике V_p^*:

Т е о р е м а 1. Линия $\gamma^* \subset V_p^*$ является геодезической I рода тогда и только тогда, когда ее проекция $\gamma \subset V_p$ является геодезической, а образом $f(\gamma)$ служит прямая $\bar{\gamma} \subset \bar{V}_p$. Линия $\gamma^* \subset V_p^*$ является геодезической II рода тогда и только тогда, когда ее проекцией $\gamma \subset V_p$ служит прямая, а образом $f(\gamma)$ является геодезическая $\bar{\gamma} \subset \bar{V}_p$. Линия $\gamma^* \subset V_p$ является геодезической III рода в том и только в том случае, если она непременно геодезическая, а ее проекциями $\gamma \subset V_p$ и $\bar{\gamma} \subset \bar{V}_p$ являются асимптотические.

Отнесем область $\Omega \subset V_p$ к основанию отображения $\mathcal{G}_p$ [1] и векторы $\vec{e}_{n+i}$ репера R^{x_2} возьмем ортами. Тогда имеем:

$$\omega_i^k = a_{ij}^k\, \omega^j, \quad \bar\omega_i^k = \bar a_{ij}^k\, \omega^j, \quad \bar\omega_i^i = 0, \quad \theta_i^k = t_{ij}^k\, \theta^j \qquad (14)$$

Допустим, что семейство θ^1 ($\theta^J=0$, $J\neq 1$) линий сети σ_p^* на графике v_p^* состоит из геодезических I рода. Тогда по теореме I семейство $\bar\omega^1$ линий сети $\bar\sigma_p$ состоит из прямых. Нетрудно убедиться, что $\bar v_p$ представляет собой линейчатую поверхность, которая становится цилиндрической с образующими вдоль вектора $\vec{e}_{n+1}$ при условии $\bar b^a_{J1}=0\ (J\neq 1)$, т.е. когда поле $\vec e_{n+1}$ обладает сопряженным и ортогональным ему полем $(p-1)$-направлений на поверхности $\bar v_p$.

Можно показать, что если p_1 $(1<p_1<p)$ семейств θ^{i_1} линий сети $\sigma_p^* \subset v_p^*$ состоит из геодезических I рода и подсеть $\bar\sigma_{p_1}\subset\bar\sigma_p$ сопряжена на $\bar v_p$ $(\bar b^a_{i_1 j_1}=0;\ i_1,j_1=\overline{1,p_1})$, то $\bar v_p$ является тангенциально вырожденной поверхностью ранга $p-p_1$ при условии, что p_1-мерное поле $[\vec e_{n+1},\dots,\vec e_{n+p_1}]$ направлений на $\bar v_p$, определяемое касательными к линиям подсети $\bar\sigma_{p_1}$, обладает сопряженным ему полем $(p-p_1)$-направлений $(\bar b^a_{i_1 i_2}=0;\ i_2=\overline{p_1+1,p})$. Аналогичные утверждения формулируются для геодезических II рода.

3. В нормальных расслоениях $N(v_p)$, $N(\bar v_p)$, $N(v_p^*)$ могут быть определены нормальные связности [2] $\mathcal D, \bar{\mathcal D}, \mathcal D^*$ соответственно с формами ω_b^a, $\bar\omega_b^a$, θ_B^A и тензорами R^a_{bij}, $\bar R^a_{bij}$, R^{*A}_{Bij}.

При фиксации нормального векторного поля $\vec e_{p+1}$ в расслоении $N(v_p)$ в силу равенств (I) фиксируется векторное поле $\vec{\mathcal E}_{p+1}$ в расслоении $N(v_p^*)$. Значит, формы ω^a_{p+1}, θ^a_{p+1} и θ^{n+j}_{p+1} соответственно главные:

$$\omega^a_{p+1} = \lambda^a_k\,\omega^k \quad (\lambda^{p+1}_k \equiv 0), \qquad (15)$$

$$\theta^a_{p+1} = \Lambda^a_k\,\theta^k \quad (\Lambda^a_k=\lambda^a_k), \qquad \theta^{n+j}_{p+1}=\Lambda^{n+j}_k\,\theta^k. \qquad (16)$$

В силу соотношений (9),(10),(13) получаем: $\Lambda^{n+j}_k = -\bar g^{ij}\, t^{p+1}_{ik}$.
С помощью соотношений (8)-(10) доказывается

Т е о р е м а 2. Векторное поле $\vec{\mathcal E}_{p+1}$ параллельно по любому направлению в связности $\mathcal D^*$ в том и только в том случае, если локально график v_p^* принадлежит гиперплоскости E_{2n-1}, ортогональной к вектору $\vec{\mathcal E}_{p+1}$ в E_{2n}. При этом локально поверхность v_p лежит в гиперплоскости E_{n-1}, ортогональной к вектору $\vec e_{p+1}$ в E_n.

В случае, описываемом теоремой 2, продолжение систем уравнений (15) и (16) соответственно дает выражения для компонентов

тензоров кривизны связностей $\mathcal D$, $\mathcal D^*$:

$$R^a_{p+1\,ij}=0,\quad R^{*a}_{p+1\,ij}=0,\quad R^{*n+k}_{p+1\,ij} = -R^{*p+1}_{n+k\,ij}=0.$$

Аналогичную теорему можно сформулировать для фиксированного нормального поля $\vec e_{n+p+1}$ в расслоении $N(\bar v_p)$ и соответствующего ему векторного поля $\vec{\mathcal E}_{n+p+1}$ в расслоении $N(v_p^*)$.

4. Отнесем область $\Omega\subset v_p$ к основанию отображения σ_p и векторы $\vec e_i$ репера R^{x_1} возьмем ортами. Тогда

$$\gamma_{ij}=\bar\gamma_{ij}=g_{ij}=\bar g_{ij}=0 \ (i\neq j), \quad \gamma_{ii}=1. \qquad (17)$$

Пусть векторное поле $\vec{\mathcal E}_{n+1}$ параллельно в связности $\mathcal D^*$ по любому направлению. Значит, во всякой точке $x\in v_p^*$ имеем:

$$\theta^a_{n+1}=0,\quad \theta^{n+j}_{n+1}=0;\quad \theta^{n+a}_{n+1}=0. \qquad (18)$$

Продолжение системы (18) приводит к выражениям для компонентов тензоров кривизны связности $\mathcal D^*$:

$$R^{*a}_{n+1\,ij} = -R^{*n+1}_{a\,ij}=0,\quad R^{*n+k}_{n+1\,ij}=0,\quad R^{*n+a}_{n+1\,ij}=-R^{*n+1}_{n+a\,ij}=0.$$

Можно показать, что в этом случае векторы $\vec e_{n+1}$, $\vec{\mathcal E}_1$ и $\vec{\mathcal E}_{n+1}$ имеют постоянные длины, поверхности v_p и $\bar v_p$ -развертывающиеся с прямолинейными образующими вдоль векторов $\vec e_1$ и $\vec e_{n+1}$ соответственно. График v_p^* представляет собой линейчатую поверхность, описываемую касательной к линии θ^1 сети σ_p^*.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств//Вопросы дифференциальной геометрии: Уч.зап./МГПИ им.В.И.Ленина.М.,1970.№374.С.41-51.

2. Л у м и с т е Ю.Г., Чакмазян А.В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространствах постоянной кривизны//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,Т.12. С.3-30.

УДК 514.76

ПРИЛОЖЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ К ПОСТРОЕНИЮ ИХ ИНВАРИАНТНЫХ НОРМАЛИЗАЦИЙ

А.В.С т о л я р о в
(Чувашский пед.ин-т)

В работах [1],[2] автором в разных дифференциальных окрест-