Пусть $\tilde{f}=\{\psi^i_j\}$ является проекцией тензора f из M на $\widetilde{M}$. При этом $\pi_* f=\tilde{f}\pi_*$. Из (I3) следует, что $\tilde{f}^2=-I$. Следовательно, справедлива

Т е о р е м а I. Если распределение m-мерных линейных элементов ξ f-структуры ранга r интегрируемо на дифференцируемом многообразии M, то M является присоединенным расслоенным многообразием, база которого снабжена почти комплексной структурой со структурным объектом $\tilde{f}$, являющимся проекцией тензора f.

Если на M задана риманова метрика G, согласованная с f-структурой

$$G_{ij} f^i_l f^j_k = G_{lk} \tag{I5}$$

и проектируемая на $\widetilde{M}$, то база $\widetilde{M}$ снабжена метрической почти комплексной структурой со структурными тензорами $\tilde{f}$, $\widetilde{G}$, где $\widetilde{G}$ - проекция тензора G. Субмерсия $\pi: M\to\widetilde{M}$ является при этом римановой субмерсией [4]. Следовательно, справедлива

Т е о р е м а 2. Если распределение m-мерных линейных элементов ξ метрической f-структуры ранга r на M интегрируемо, то M является расслоенным римановым многообразием, база которого снабжена метрической почти комплексной структурой со структурными объектами $\tilde{f}, \widetilde{G}$, являющимися проекциями тензоров f и G соответственно.

Почти контактная структура на M является частным классом f-структуры. Для почти контактного многообразия $r=n-1$ (n-нечетное), размерность элементов распределения η равна $n-1$, а размерность элементов распределения ξ равна 1. Так как распределение одномерных линейных элементов всегда интегрируемо, то из теорем I и 2 следует справедливость следующих теорем:

Т е о р е м а 3. Почти контактное многообразие $M(f\xi\eta)$ является присоединенным расслоенным многообразием, база которого снабжена почти комплексной структурой со структурным объектом $\tilde{f}$, являющимся проекцией тензора f,

Т е о р е м а 4 [4]. Метрическое почти контактное многообразие $M(f\xi\eta G)$ является расслоенным римановым многообразием, база которого снабжена метрической почти комплексной структурой со структурными объектами $\tilde{f}, G$, являющимися проекциями тензоров f и G.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии//Тр.геметр.семинара/ВИНИТИ. М., 1966.Т.1.С.139-190.

2. П о л я к о в Н.Д. Дифференциальная геометрия многообразий f-структуры//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1983.Т.I5.С.95-I25.

3. Ш а п у к о в Б.Н. Связности на дифференцируемых расслоениях//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1983.Т.15.С.61-93.

4. Tashiro Yoshihiro, Kim Byung Hax. Almost complex and almost contact structures in fibred Rieamannian spaces. || Hiroshima Math. J. 1988. N18. P. 161-188.

УДК 514.75

СКОМПОНОВАННЫЕ ТРЕХСОСТАВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И.П о п о в
(Калининградский ун-т)

Изучается специальный класс $\mathcal{H}$-распределений проективного пространства P_n [1]-скомпонованные (по терминологии А.П.Нордена [2]) трехсоставные распределения проективного пространства $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ $(r<m<n-1)$. Распределение $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ имеет следующую структуру: а) оснащающее M-распределение скомпоновано из двух распределений $\mathcal{H}_r$ и $\mathcal{H}_\ell$ $(\ell=m-r)$ (соответственно Λ-распределение и L-распределение); б) H-распределение скомпоновано из трех распределений $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_{n-m-1}$, где $\mathcal{H}_{n-m-1}$-распределение - есть распределение характеристик χ_{n-m-1} (Φ-распределение) [1]. Кроме того, мы требуем, чтобы все основные структурные распределения данного распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ были взаимны [3], [1]. Дано задание распределения в репере $\mathcal{R}(H)$ нулевого порядка [4] и доказана теорема существования. Выяснена аналитическая характеристика выбранного репера $\mathcal{R}(H)$, рассмотрен вопрос о голономности распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ и найдены поля основных геометрических объектов распределения в окрестности I-го порядка. Найдены нормализации Нордена-Чакмазяна всех основных структурных распределений данного распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$. Построены квазинормали трех типов в различных дифференциальных окрестностях, которые затем применяются для построения нормалей распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$. Вводятся в рассмотрение фокальные образы распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$, с помощью которых выясняется геометрический смысл построенных ранее квазинормалей. Для основных структурных распределений $\mathcal{H}_r, \mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_{n-1}$ введены оснащения в смысле Э.Картана.

Во всей работе используется следующая схема индексов:

$\bar{\mathcal{J}}, \bar{\varkappa}, \bar{\mathcal{L}}, \ldots = \overline{0,n}$; $\mathcal{J}, \varkappa, \mathcal{L}, \ldots = \overline{1,n}$; $p, q, r, s, t, f = \overline{1,r}$;

$\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}, \bar{t} = \overline{0,r}$; $i, j, k, \ell, h = \overline{r+1,m}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1,n-1}$;

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} = \overline{0,m}; n$; $u, v, w = \overline{r+1,n-1}$; $\varepsilon, \rho, \sigma, \tau, \pi = \overline{1,n-1}$; $a, b, c, d = \overline{1,m}$; $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w} = \overline{r+1,n}$; $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} = (\overline{1,r}; \overline{m+1,n-1})$; $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} = \overline{1,m}; n$; $\hat{p}, \hat{q}, \hat{s}, \hat{t} = \overline{1,r}; n$;
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, \hat{\ell} = \overline{r+1,m}; n$

§1. Дифференциальные уравнения скомпонованного трехсоставного распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$ проективного пространства

1. Рассмотрим такие трехсоставные $\mathcal{H}$-распределения [4], для которых оснащающее M-распределение (распределение $\mathcal{H}_m$) скомпоновано из двух распределений $\mathcal{H}_r$ (распределение плоскостей $\Lambda \overset{def}{=} \Pi_r$) и $\mathcal{H}_\ell$ (распределение плоскостей $L \overset{def}{=} \Pi_\ell$) [4], т.е. в каждом центре X имеем соотношения: $[\Pi_r, \Pi_\ell] = \Pi_m$, $\Pi_r \cap \Pi_\ell = X$. Кроме того, оснащающее распределение $\mathcal{H}_{n-\ell}$ (распределение гиперплоскостей $\Pi_{n-1} = H$ или H-распределение) также является скомпонованным из трех распределений $\mathcal{H}_r, \mathcal{H}_\ell, \mathcal{H}_{n-m-1}$, где распределение $\mathcal{H}_{n-m-1}$ -есть распределение характеристик χ_{n-m-1} (Φ-распределение) гиперплоскостей Π_{n-1}. Таким образом, если центр X $\mathcal{H}$-распределения зафиксирован, то фиксируются три плоскости

$$\Lambda(X) \overset{def}{=} \Pi_r(X), \quad L(X) \overset{def}{=} \Pi_\ell(X), \quad \Phi(X) \overset{def}{=} \Pi_{n-m-1}(X),$$

где $[\Lambda, L] = M$, $[M, \Phi] = H$, $[\Lambda, L, \Phi] = H$, $\Lambda \cap L = X$, $\Phi \cap M = X$.

Рассматриваемое скомпонованное трехсоставное регулярное распределение [1] проективного пространства P_n обозначим символом $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$. Потребуем, чтобы при смещении центра X вдоль кривых, принадлежащих одному из распределений $\mathcal{H}_r, \mathcal{H}_\ell, \mathcal{H}_{n-m-1}$, соответствующая этому смещению характеристика гиперплоскости $H_{n-1}(X)$ в каждом центре X была натянута на линейные элементы двух других распределений. Выберем репер нулевого порядка $\mathcal{R}(H)$ [4] следующим образом. Вершину A_0 репера $\{A_{\mathcal{J}}\}$ совместим с центром X $\mathcal{H}$-распределения, вершины $\{A_p\}$ поместим в плоскости $\Lambda(A_0)$, вершины $\{A_i\}$ -в плоскость $\Pi_\ell(A_0) \overset{def}{=} L(A_0)$; вершины $\{A_\alpha\}$- в плоскость $\chi(A_0) \overset{def}{=} \Phi(A_0)$. Относительно репера нулевого порядка $\mathcal{R}(H)$ дифференциальные уравнения распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$ имеют вид:

$$\begin{cases} \omega_p^n = \Lambda^n_{p\hat{q}}\,\omega_0^{\hat{q}}, & \omega_p^\alpha = \Lambda^\alpha_{p\varkappa}\,\omega_0^\varkappa, \quad \omega_p^i = \Lambda^i_{p\varkappa}\,\omega_0^\varkappa, \\ \omega_i^n = M^n_{i\hat{j}}\,\omega_0^{\hat{j}}, & \omega_i^\alpha = M^\alpha_{i\varkappa}\,\omega_0^\varkappa, \quad \omega_i^p = M^p_{i\varkappa}\,\omega_0^\varkappa, \\ \omega_\alpha^n = H^n_{\alpha\hat{\beta}}\,\omega_0^{\hat{\beta}}, & \omega_\alpha^p = H^p_{\alpha\varkappa}\,\omega_0^\varkappa, \quad \omega_\alpha^i = H^i_{\alpha\varkappa}\,\omega_0^\varkappa. \end{cases} \tag{I.I}$$

Продолжение уравнений (I.I) приводит к следующим дифференциальным уравнениям и соотношениям, которым подчинены компоненты фундаментального объекта первого порядка $\Gamma_1 = \{\Lambda^n_{p\hat{q}}, \Lambda^\alpha_{p\varkappa}, \Lambda^i_{p\varkappa}, M^n_{i\hat{j}}, M^\alpha_{i\varkappa}, M^p_{i\varkappa}, H^n_{\alpha\hat{\beta}}, H^a_{\alpha\varkappa}\}$ распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$:

$$\nabla\Lambda^n_{pq} + \Lambda^n_{pq}\,\omega_0^0 = \Lambda^n_{pq\varkappa}\,\omega_0^\varkappa, \tag{I.2}$$

$$\nabla\Lambda^n_{pn} + \Lambda^n_{pn}\,\omega_0^0 - \Lambda^n_{pq}\,\omega_n^q - \omega_p^0 = \Lambda^n_{pn\varkappa}\,\omega_0^\varkappa, \tag{I.3}$$

$$\nabla M^n_{ij} + M^n_{ij}\,\omega_0^0 = M^n_{ij\varkappa}\,\omega_0^\varkappa, \tag{I.4}$$

$$\nabla M^n_{in} + M^n_{in}\,\omega_0^0 - M^n_{ij}\,\omega_n^j - \omega_i^0 = M^n_{in\varkappa}\,\omega_0^\varkappa, \tag{I.5}$$

$$\nabla H^n_{\alpha\beta} + H^n_{\alpha\beta}\,\omega_0^0 = H^n_{\alpha\beta\varkappa}\,\omega_0^\varkappa, \tag{I.6}$$

$$\nabla H^n_{\alpha n} + H^n_{\alpha n}\,\omega_0^0 - H^n_{\alpha\beta}\,\omega_n^\beta - \omega_\alpha^0 = H^n_{\alpha n\varkappa}\,\omega_0^\varkappa, \tag{I.7}$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_{p\varkappa} + \Lambda^\alpha_{p\varkappa}\,\omega_0^0 + \Lambda^n_{p\varkappa}\,\omega_n^\alpha - \delta^\alpha_\varkappa\,\omega_p^0 = \Lambda^\alpha_{p\varkappa L}\,\omega_0^L, \tag{I.8}$$

$$\nabla M^\alpha_{i\varkappa} + M^\alpha_{i\varkappa}\,\omega_0^0 + M^n_{i\varkappa}\,\omega_n^\alpha - \delta^\alpha_\varkappa\,\omega_i^0 = M^\alpha_{i\varkappa L}\,\omega_0^L, \tag{I.9}$$

$$\nabla H^p_{\alpha\varkappa} + H^p_{\alpha\varkappa}\,\omega_0^0 + H^n_{\alpha\varkappa}\,\omega_n^p - \delta^p_\varkappa\,\omega_\alpha^0 = H^p_{\alpha\varkappa L}\,\omega_0^L, \tag{I.10}$$

$$\nabla\Lambda^i_{p\varkappa} + \Lambda^i_{p\varkappa}\,\omega_0^0 + \Lambda^n_{p\varkappa}\,\omega_n^i - \delta^i_\varkappa\,\omega_p^0 = \Lambda^i_{p\varkappa L}\,\omega_0^L, \tag{I.11}$$

$$\nabla M^p_{i\varkappa} + M^p_{i\varkappa}\,\omega_0^0 + M^n_{i\varkappa}\,\omega_n^p - \delta^p_\varkappa\,\omega_i^0 = M^p_{i\varkappa L}\,\omega_0^L, \tag{I.12}$$

$$\nabla H^i_{\alpha\varkappa} + H^i_{\alpha\varkappa}\,\omega_0^0 + H^n_{\alpha\varkappa}\,\omega_n^i - \delta^i_\varkappa\,\omega_\alpha^0 = H^i_{\alpha\varkappa L}\,\omega_0^L, \tag{I.13}$$

где

$$M^n_{k[i}\,\Lambda^k_{|p|j]} + \Lambda^n_{pq}\,M^q_{[ij]} + \Lambda^n_{pn}\,M^n_{[ij]} = 0,$$

$$H^n_{\beta[\alpha}\,\Lambda^\beta_{|p|\gamma]} + \Lambda^n_{pq}\,H^q_{[\alpha\gamma]} + \Lambda^n_{pn}\,H^n_{[\alpha\gamma]} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&H^n_{\alpha\beta} M^\beta_{[ij]} + M^n_{k[i} H^k_{|\alpha|j]} + H^n_{\alpha n} M^n_{[ij]} = 0,\\
&H^n_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_{[pq]} + \Lambda^n_{t[p} H^t_{|\alpha|q]} + H^n_{\alpha n} \Lambda^n_{[pq]} = 0,\\
&\Lambda^n_{t[p} M^t_{|i|q]} + M^n_{ij} \Lambda^j_{[pq]} + M^n_{in} \Lambda^n_{[pq]} = 0,\\
&\Lambda^n_{\gamma[\alpha} M^\gamma_{|i|\beta]} + M^n_{ij} H^j_{[\alpha\beta]} + M^n_{in} H^n_{[\alpha\beta]} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Коэффициенты в правых частях уравнений (1.2) - (1.13), вообще говоря, не симметричны по нижним индексам. Например,

$$\Lambda^n_{p[qs]} = \Lambda^n_{pn} \Lambda^n_{[qs]}, \quad \Lambda^n_{p[ij]} = \Lambda^n_{pn} \Lambda^n_{[ij]} + \Lambda^n_{pq} M^q_{[ij]}, \quad \Lambda^n_{p[iq]} = \Lambda^n_{pt} M^t_{[iq]}.$$

Учитывая связи (1.14) на компоненты фундаментального объекта первого порядка Γ_1 распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$, приходим к выводу:

Т е о р е м а 1. Трехсоставные распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ существуют с произволом $2(n-m-1)m + 2r(m-r) + (n-1) - [(n-\ell-1)C^2_\ell + (n-r-1)C^2_r + m\,C^2_{n-m-1}]$ функций n аргументов.

2. Выясним геометрическую характеристику введенного репера нулевого порядка. Рассмотрим тангенциальный репер $\{\tau^{\bar{\jmath}}\}$, взаимный точечному $\{A_{\bar{x}}\}$: $(A_{\bar{x}}, \tau^{\bar{\jmath}}) = \delta^{\bar{\jmath}}_{\bar{x}}$, $d\tau^{\bar{\jmath}} = -\omega^{\bar{\jmath}}_{\bar{x}} \tau^{\bar{x}}$ $(\tau^n = \Pi_{n-1})$.
Так как по условию (рассматривается специальный класс $\mathcal{H}$-распределений) при смещении центра A_0 вдоль кривых

$$\mathcal{L}: \omega^{\hat{K}}_0 = 0,\ \omega^p_0 = \mu^p\theta,\ \mathcal{D}\theta = \theta\wedge\theta^0_0,\ \nabla\mu^p - \mu^p(\theta^0_0 + \omega^0_0) = \bar{\mu}^p\theta, \tag{1.15}$$

принадлежащих базисному распределению $\mathcal{H}_r$, точки $\{A_\alpha\}$ и $\{A_i\}$ принадлежат $(n-r-1)$-мерной характеристике $\chi_{n-r-1}(A_0) = [L(A_0), \Phi(A_0)]$, то имеем

$$\begin{cases} (A_i, d\tau^n) = 0 \pmod{\mathcal{L}} \Leftrightarrow M^n_{ip} = 0,\\ (A_\alpha, d\tau^n) = 0 \pmod{\mathcal{L}} \Leftrightarrow H^n_{\alpha p} = 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Аналогично получаем

$$\begin{cases} (A_\alpha, d\tau^n) = 0 \pmod{\hat{\ell}} \Leftrightarrow H^n_{\alpha i} = 0,\\ (A_p, d\tau^n) = 0 \pmod{\hat{\ell}} \Leftrightarrow \Lambda^n_{pi} = 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

в силу того, что точки $\{A_\alpha\}$ и $\{A_p\}$ принадлежат характеристике $\chi_{n-\ell-1}(A_0) = [\Phi(A_0), \Lambda(A_0)]$ гиперплоскости $H(A_0)$ при смещении центра A_0 вдоль кривых

$$\hat{\ell}: \omega^n_0 = \omega^\alpha_0 = \omega^p_0 = 0;\ \omega^i_0 = \mu^i\theta,\ \mathcal{D}\theta = \theta\wedge\theta^0_0;\ \nabla\mu^i - \mu^i(\theta^0_0 + \omega^0_0) = \mu^i_1\theta, \tag{1.18}$$

принадлежащих распределению $\mathcal{H}_\ell$. Точки $\{A_p\}, \{A_i\}$ принадлежат характеристике $\overset{*}{\chi}_m(A_0) = [\Lambda, L]$ гиперплоскости $H(A_0)$ при смещении центра A_0 вдоль кривых

$$\overset{*}{\gamma}: \omega^n_0 = 0,\ \omega^a_0 = 0,\ \omega^\alpha_0 = \mu^\alpha\theta,\ \mathcal{D}\theta = \theta\wedge\theta^0_0;\ \nabla\mu^\alpha - \mu^\alpha(\theta^0_0 + \omega^0_0) = \bar{\mu}^\alpha_1\theta, \tag{1.19}$$

принадлежащих распределению $\mathcal{H}_{n-m-1}$ характеристик χ_{n-m-1}.
Следовательно,

$$\begin{cases} (A_p, d\tau^n) = 0 \pmod{\overset{*}{\gamma}} \Leftrightarrow \Lambda^n_{p\alpha} = 0,\\ (A_i, d\tau^n) = 0 \pmod{\overset{*}{\gamma}} \Leftrightarrow M^n_{i\alpha} = 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Известно [3],[1], что условия

$$\Lambda^n_{pi} = 0, \quad \Lambda^n_{p\alpha} = 0 \tag{1.21}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы $\Lambda(A_0) = \overset{*}{\chi}_r(A_0)$, где $\overset{*}{\chi}_r(A_0)$ - характеристика гиперплоскости $H(A_0)$ при смещении центра A_0 вдоль кривых $\overset{*}{\mathcal{L}}$, принадлежащих распределению $\mathcal{H}_{n-r-1}$ характеристик χ_{n-r-1}. В силу (1.17) и (1.20) условия (1.21) выполняются, и, следовательно, распределение $\mathcal{H}_r$ взаимно. Аналогично, убеждаемся, что условия

$$M^n_{i\alpha} = 0,\ M^n_{ip} = 0; \quad (1.22) \qquad H^n_{\alpha i} = 0,\ H^n_{\alpha p} = 0; \quad (1.23)$$

$$H^n_{\alpha p} = 0,\ M^n_{ip} = 0; \quad (1.24) \qquad H^n_{\alpha i} = 0,\ \Lambda^n_{pi} = 0; \quad (1.25)$$

$$M^n_{i\alpha} = 0, \quad \Lambda^n_{p\alpha} = 0 \tag{1.26}$$

необходимы и достаточны, чтобы соответственно распределения $\mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_{n-m-1}$, $\mathcal{H}_{n-r-1}$, $\mathcal{H}_{n-\ell-1}$, $\mathcal{H}_m$ были взаимны.

3. Так как распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$, $\mathcal{H}_m$, $\mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_{n-m-1}$ регулярны, то тензоры $\{\Lambda^n_{pq}\}, \{M^n_{a\ell}\}, \{M^n_{ij}\}, \{H^n_{\alpha\beta}\}$ невырожденные [1],[3], т.е.

$$\begin{cases} \Lambda \overset{def}{=} \det\|\Lambda^n_{pq}\| \neq 0,\quad M \overset{def}{=} \det\|M^n_{ij}\| \neq 0,\quad H \overset{def}{=} \det\|H^n_{\alpha\beta}\| \neq 0,\\ F \overset{def}{=} \det\begin{Vmatrix} \Lambda^n_{pq} & 0\\ 0 & M^n_{ij} \end{Vmatrix} = \det\|M^n_{a\ell}\| = \Lambda M \neq 0 \end{cases} \tag{1.27}$$

Главный фундаментальный тензор $\{S^n_{\sigma p}\}$ H-распределения невырожденный:

$$S \overset{def}{=} \det\|S^n_{\sigma\varrho}\| = \det\begin{Vmatrix} \Lambda^n_{pq} & 0 & 0\\ 0 & M^n_{ij} & 0\\ 0 & 0 & H^n_{\alpha\beta} \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Для тензоров первого порядка $\{\Lambda^n_{pq}\}$, $\{M^n_{ij}\}$, $\{H^n_{\alpha\beta}\}$ можно ввести обращенные тензоры $\{\Lambda^{pq}_n\}$, $\{M^{ij}_n\}$, $\{H^{\alpha\beta}_n\}$, компоненты которых удовлетворяют соответственно условиям:

$$\begin{cases} \Lambda^{pq}_n \Lambda^n_{qt} = \Lambda^{qp}_n \Lambda^n_{tq} = \delta^p_t, & \nabla\Lambda^{pq}_n - \Lambda^{pq}_n \omega^0_0 = \Lambda^{pq}_{n\varkappa}\,\omega^\varkappa_0, \\ M^{ik}_n M^n_{kj} = M^{ki}_n M^n_{jk} = \delta^i_j; & \nabla M^{ij}_n - M^{ij}_n\,\omega^0_0 = M^{ij}_{n\varkappa}\,\omega^\varkappa_0, \\ H^{\alpha\beta}_n H^n_{\beta\gamma} = H^{\beta\alpha}_n H^n_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\gamma; & \nabla H^{\alpha\beta}_n - H^{\alpha\beta}_n\,\omega^0_0 = H^{\alpha\beta}_{n\varkappa}\,\omega^\varkappa_0. \end{cases} \qquad (1.28)$$

§2. Основные геометрические объекты регулярного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ в окрестности первого порядка. О голономности распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$

1. Из дифференциальных уравнений (1.2),(1.4),(1.6),(1.8)-(1.13) следует, что величины $\{\Lambda^{\hat u}_{pq}\}$, $\{\Lambda^{\alpha}_{pi}\}$, $\{M^{\alpha}_{ip}\}$, $\{M^{\hat A}_{ij}\}$, $\{\Lambda^{\hat\imath}_{pq}\}$, $\{\Lambda^{i}_{p\alpha}\}$, $\{H^{p}_{\alpha\beta}\}$, $\{H^{p}_{\alpha j}\}$, $\{H^{i}_{\alpha q}\}$, $\{H^{\hat\tau}_{\alpha\beta}\}$, $\{M^{p}_{ij}\}$, $\{M^{p}_{i\alpha}\}$ образуют тензоры 1-го порядка распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$, вообще говоря, не симметричные по нижним индексам. Построим с помощью этих тензоров следующие охваты.

а) Охваты симметрических тензоров $\{b^{\hat u}_{pq}\}$, $\{m^{\hat A}_{ij}\}$, $\{h^{\hat a}_{\alpha\beta}\}$ первого порядка

$$b^{\hat u}_{pq} = \frac{1}{2}\left(\Lambda^{\hat u}_{pq} + \Lambda^{\hat u}_{qp}\right), \quad \nabla b^{\hat u}_{pq} + b^{\hat u}_{pq}\,\omega^0_0 = b^{\hat u}_{pq\varkappa}\,\omega^\varkappa_0, \qquad (2.1)$$

$$m^{\hat A}_{ij} = \frac{1}{2}\left(M^{\hat A}_{ij} + M^{\hat A}_{ji}\right), \quad \nabla m^{\hat A}_{ij} + m^{\hat A}_{ij}\,\omega^0_0 = m^{\hat A}_{ij\varkappa}\,\omega^\varkappa_0, \qquad (2.2)$$

$$h^{\hat a}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(H^{\hat a}_{\alpha\beta} + H^{\hat a}_{\beta\alpha}\right), \quad \nabla h^{\hat a}_{\alpha\beta} + h^{\hat a}_{\alpha\beta}\,\omega^0_0 = h^{\hat a}_{\alpha\beta\varkappa}\,\omega^\varkappa_0, \qquad (2.3)$$

где

$$b^{\hat u}_{pq\varkappa} = \frac{1}{2}\left(\Lambda^{\hat u}_{pq\varkappa} + \Lambda^{\hat u}_{qp\varkappa}\right), \quad m^{\hat A}_{ij\varkappa} = \frac{1}{2}\left(M^{\hat A}_{ij\varkappa} + M^{\hat A}_{ji\varkappa}\right), \quad h^{\hat a}_{\alpha\beta\varkappa} = \frac{1}{2}\left(H^{\hat a}_{\alpha\beta\varkappa} + H^{\hat a}_{\beta\alpha\varkappa}\right). \qquad (2.4)$$

Из уравнений (2.1)-(2.3) следует, что величины $\{b^{n}_{pq}\}$, $\{b^{\hat\tau}_{pq}\}$, $\{b^{\hat\alpha}_{pq}\}$, $\{m^{n}_{ij}\}$, $\{m^{\hat\alpha}_{ij}\}$, $\{h^{n}_{\alpha\beta}\}$, $\{h^{\hat\tau}_{\alpha\beta}\}$, $\{h^{\hat p}_{\alpha\beta}\}$ являются тензорами первого порядка - подобъектами соответственно тензоров $\{b^{\hat u}_{pq}\}$, $\{m^{\hat A}_{ij}\}$, $\{h^{\hat a}_{\alpha\beta}\}$.

в) Охваты кососимметрических тензоров $\{\tau^{\hat u}_{pq}\}$, $\{\tau^{\hat A}_{ij}\}$, $\{\tau^{\hat a}_{\alpha\beta}\}$ первого порядка

$$\tau^{\hat u}_{pq} = \frac{1}{2}\left(\Lambda^{\hat u}_{pq} - \Lambda^{\hat u}_{qp}\right), \quad \nabla\tau^{\hat u}_{pq} + \tau^{\hat u}_{pq}\,\omega^0_0 = \tau^{\hat u}_{pq\varkappa}\,\omega^\varkappa_0, \qquad (2.5)$$

$$\tau^{\hat A}_{ij} = \frac{1}{2}\left(M^{\hat A}_{ij} - M^{\hat A}_{ji}\right), \quad \nabla\tau^{\hat A}_{ij} + \tau^{\hat A}_{ij}\,\omega^0_0 = \tau^{\hat A}_{ij\varkappa}\,\omega^\varkappa_0, \qquad (2.6)$$

$$\tau^{\hat a}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(H^{\hat a}_{\alpha\beta} - H^{\hat a}_{\beta\alpha}\right), \quad \nabla\tau^{\hat a}_{\alpha\beta} + \tau^{\hat a}_{\alpha\beta}\,\omega^0_0 = \tau^{\hat a}_{\alpha\beta\varkappa}\,\omega^\varkappa_0, \qquad (2.7)$$

где

$$\tau^{\hat u}_{pq\varkappa} = \frac{1}{2}\left(\Lambda^{\hat u}_{pq\varkappa} - \Lambda^{\hat u}_{qp\varkappa}\right), \quad \tau^{\hat A}_{ij\varkappa} = \frac{1}{2}\left(M^{\hat A}_{ij\varkappa} - M^{\hat A}_{ji\varkappa}\right), \quad \tau^{\hat a}_{\alpha\beta\varkappa} = \frac{1}{2}\left(H^{\hat a}_{\alpha\beta\varkappa} - H^{\hat a}_{\beta\alpha\varkappa}\right) \qquad (2.8)$$

Отметим, что

$$\Lambda^{\hat u}_{pq} = b^{\hat u}_{pq} + \tau^{\hat u}_{pq}, \quad M^{\hat A}_{ij} = m^{\hat A}_{ij} + \tau^{\hat A}_{ij}, \quad H^{\hat a}_{\alpha\beta} = h^{\hat a}_{\alpha\beta} + \tau^{\hat a}_{\alpha\beta}. \qquad (2.9)$$

2. Система уравнений

$$\omega^{\hat u}_0 = 0, \qquad (2.10)$$

ассоциированная [5] с базисным распределением $\mathcal{H}_\tau$, вполне интегрируема тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор $\{\tau^{\hat u}_{pq}\}$. В этом случае базисное распределение $\mathcal{H}_\tau$ определяет $(n-\tau)$-параметрическое семейство τ-мерных поверхностей (плоскости Π_τ огибаются τ-мерными поверхностями V_τ $(n-\tau)$-параметрического семейства). При смещении центра A_0 вдоль фиксированной поверхности V_τ уравнения (1.1),(2.10) в выбранном репере 1-го порядка являются дифференциальными уравнениями m-вырожденной распадающейся гиперполосы $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ ранга τ [6].

Определение 1. Вырожденная гиперполоса $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ называется распадающейся, если ее характеристика $\chi_{n-\tau-1}$ распадается на две плоскости Π_ℓ и Π_{n-m-1}:

$$\Pi_{n-m-1}(A_0) \cap \Pi_\ell(A_0) = A_0, \quad [\Pi_{n-m-1}(A_0), \Pi_\ell(A_0)] = \chi_{n-\tau-1}(A_0),$$

где плоскость $\Pi_\ell(A_0)$ - плоская образующая базисной поверхности V^{τ}_{m} гиперполосы $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$, $A_0 \in V^{\tau}_{m}$.

Определение 2. Вырожденная гиперполоса $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ называется m-вырожденной или развертывающейся, если базисная поверхность гиперполосы $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ является m-вырожденной (или развертывающейся) поверхностью [7],[8].

Итак, обращение в нуль тензора $\{\tau^{\hat u}_{pq}\}$ есть условие, при котором пространство P_n расслаивается на $(n-\tau)$-параметрическое семейство m-вырожденных гиперполос $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ так, что плоскость $\Pi_\tau(A_0)$ в своем центре A_0 является касательной плоскостью поверхности V_τ (V_τ-направляющая поверхность базисной поверхности V^{τ}_{m} вырожденной гиперполосы [9],[4]). Плоскость Π_m является касательной плоскостью базисной поверхности V^{τ}_{m} вырожденной гиперполосы $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$, а плоскость $\Pi_{n-1}(A_0) \overset{def}{=} H(A_0)$ является ее главной касательной гиперплоскостью. По аналогии с работами [10],[3] тензор $\{\tau^{\hat u}_{pq}\}$ назовем тензором неголономности трехсоставного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$. Распределение $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ будем называть голономным, если его базисное распределение голономно $(\tau^{\hat u}_{pq} = 0)$.

Последовательное продолжение дифференциальных уравнений (I.2) приводит к фундаментальному объекту $\{\Lambda^n_{pq},\dots,\Lambda^n_{pq_1\dots q_{s-1}};\Lambda^n_{pq_1\dots q_s}\}$ – подобъекту фундаментального объекта порядка s распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$. Поэтому в той части геометрии распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$, которая определяется фундаментальными подобъектами, должна быть некоторая аналогия с геометрией вырожденных распадающихся гиперполос $\mathcal{H}^{\tau}_m \subset P_n$ [6].

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\omega^{\hat\alpha}_0 = 0, \tag{2.11}$$

ассоциированную с оснащающим распределением $\mathcal{H}_m$ плоскостей Π_m. Система (2.11) вполне интегрируема тогда и только тогда, когда

$$\tau^{\hat\alpha}_{pq} = 0,\ \tau^{\hat\alpha}_{ij} = 0,\ M^{\alpha}_{ij} = 0. \tag{2.12}$$

В этом случае распределение плоскостей Π_m определяет $(n-m)$-параметрическое семейство m-мерных поверхностей (плоскости Π_m огибаются m-мерными поверхностями V_m ($n-m$)-параметрического семейства). При смещении центра A_0 вдоль фиксированной поверхности V_m уравнения (2.12),(1.1) в выбранном репере 1-го порядка являются дифференциальными уравнениями регулярной гиперполосы H_m, базисная поверхность V_m которой несет двухкомпонентную сопряженную систему [11]. Следовательно, при выполнении условий (2.12) пространство P_n расслаивается на $(n-m)$-параметрическое семейство регулярных гиперполос H_m так, что плоскость $\Pi_m(A_0)$ в своем центре A_0 является касательной плоскостью базисной поверхности V_m гиперполосы H_m, а плоскость $H(A_0)$ является ее главной касательной гиперплоскостью. Отметим, что полученное $(n-m)$-параметрическое семейство регулярных гиперполос H_m является семейством особого типа: базисные поверхности V_m семейства несут двухкомпонентную сопряженную систему [11].

Таким образом, проективно-дифференциальную геометрию скомпонованного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ можно применить для изучения геометрии, как вырожденных гиперполос $\mathcal{H}^{\tau}_m \subset P_n$, так и регулярных гиперполос $H_m \subset P_n$ (общего и специального типов).

Оснащающее распределение $\mathcal{H}_m$ плоскостей Π_m назовем голономным, если выполнены условия (2.12).

Уравнение $\omega^n_0 = 0$, ассоциированное с оснащающим распределением $\mathcal{H}_{n-1}$ гиперплоскостей Π_{n-1}, вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\tau^n_{ij} = 0,\quad \tau^n_{pq} = 0,\quad \tau^n_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.13}$$

В этом случае оснащающее распределение $\mathcal{H}_{n-1}$ определяет однопараметрическое семейство гиперповерхностей V_{n-1} (плоскости Π_{n-1} огибаются гиперповерхностями однопараметрического семейства), причем распределение $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ является вполне взаимным.

3. Построим ряд основных геометрических объектов в окрестности 1-го порядка образующего элемента распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$. Прежде всего заметим, что величины Λ, M, H (1.27) являются относительными инвариантами

$$\begin{cases} d\ln\Lambda = 2\omega^p_p - \tau(\omega^0_0 + \omega^n_n) + \tilde\Lambda_x\omega^x_0, \\ d\ln M = 2\omega^i_i - \ell(\omega^0_0 + \omega^n_n) + \widetilde M_x\omega^x_0, \\ d\ln H = 2\omega^\alpha_\alpha - (n-m-1)(\omega^0_0 + \omega^n_n) + \widetilde H_x\omega^x_0, \end{cases} \tag{2.14}$$

где

$$\tilde\Lambda_x = \Lambda^{qp}_n\Lambda_{pqx},\quad \widetilde M_x = M^{ji}_n M_{ijx},\quad \widetilde H_x = H^{\beta\alpha}_n H_{\alpha\beta x}. \tag{2.15}$$

В общем случае

$$b \overset{def}{=} \det\|b^n_{pq}\| \neq 0,\quad \hat m \overset{def}{=} \det\|m^n_{ij}\| \neq 0,\quad h \overset{def}{=} \det\|h^n_{\alpha\beta}\| \neq 0.$$

В силу этого можно найти обращенные симметрические тензоры 1-го порядка $\{b^{pq}_n\}, \{m^{ij}_n\}, \{h^{\alpha\beta}_n\}$. С помощью этих тензоров, а также обращенных тензоров (1.28) введем в рассмотрение следующие три группы квазитензоров первого порядка:

$$H^p_n = \frac{1}{n-m-1}H^p_{\alpha\beta}H^{\beta\alpha}_n,\quad M^p_n = \frac{1}{\ell}M^p_{ij}\Lambda^{ji}_n,\quad N^p_n = \frac{1}{n-m-1}H^p_{\alpha\beta}h^{\beta\alpha}_n, \tag{2.16}$$

$$h^p_n = \frac{1}{n-m-1}h^p_{\alpha\beta}h^{\beta\alpha}_n,\quad m^p_n = \frac{1}{\ell}m^p_{ij}m^{ji}_n,\quad \ell^p_n = \frac{1}{\ell}M^p_{ij}m^{ji}_n;$$

– –

$$\Lambda^i_n = \frac{1}{\tau}\Lambda^i_{pq}\Lambda^{qp}_n,\quad H^i_n = \frac{1}{n-m-1}H^i_{\alpha\beta}H^{\beta\alpha}_n,\quad L^i_n = \frac{1}{\tau}\Lambda^i_{pq}b^{qp}_n, \tag{2.17}$$

$$N^i_n = \frac{1}{n-m-1}H^i_{\alpha\beta}h^{\beta\alpha}_n,\quad b^i_n = \frac{1}{\tau}b^i_{pq}b^{qp}_n,\quad h^i_n = \frac{1}{n-m-1}h^i_{\alpha\beta}h^{\beta\alpha}_n;$$

– –

$$\Lambda^{\alpha}_{n} = \frac{1}{r}\Lambda^{\alpha}_{pq}\Lambda^{qp}_{n}, \quad \mathcal{M}^{\alpha}_{n} = \frac{1}{\ell}\mathcal{M}^{\alpha}_{ij}\Lambda^{ji}_{n}, \quad L^{\alpha}_{n} = \frac{1}{r}\Lambda^{\alpha}_{pq} b^{qp}_{n},$$

$$\ell^{\alpha}_{n} = \frac{1}{\ell}\mathcal{M}^{\alpha}_{ij} m^{ji}_{n}, \quad b^{\alpha}_{n} = \frac{1}{r}\ell^{\alpha}_{pq} b^{qp}_{n}, \quad m^{\alpha}_{n} = \frac{1}{\ell} m^{\alpha}_{ij} m^{ji}_{n} \qquad (2.18)$$

Квазитензоры (2.16) - (2.18) удовлетворяют соответственно одному из дифференциальных уравнений

$$\nabla \nu^{p}_{n} + \omega^{p}_{n} = \nu^{p}_{n\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \quad \nabla \nu^{i} + \omega^{i}_{n} = \nu^{i}_{n\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \quad \nabla \nu^{\alpha}_{n} + \omega^{\alpha}_{n} = \nu^{\alpha}_{n\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}. \qquad (2.19)$$

Далее находим квазитензоры 1-го порядка

$$\mathcal{M}_{i} = \frac{1}{n-m-1}\mathcal{M}^{\alpha}_{i\alpha}, \qquad \nabla \mathcal{M}_{i} + \mathcal{M}_{i}\omega^{0}_{0} - \omega^{0}_{i} = \mathcal{M}_{i\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.20)$$

$$L_{i} = \frac{1}{r}\mathcal{M}^{p}_{ip}, \qquad \nabla L_{i} + L_{i}\omega^{0}_{0} - \omega^{0}_{i} = L_{i\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.21)$$

$$\mathcal{M}_{p} = \frac{1}{n-m-1}\Lambda^{\alpha}_{p\alpha}, \qquad \nabla \mathcal{M}_{p} + \mathcal{M}_{p}\omega^{0}_{0} - \omega^{0}_{p} = \mathcal{M}_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.22)$$

$$L_{p} = \frac{1}{\ell}\Lambda^{i}_{pi}, \qquad \nabla L_{p} + L_{p}\omega^{0}_{0} - \omega^{0}_{p} = L_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.23)$$

$$H_{\alpha} = \frac{1}{r}H^{p}_{\alpha p}, \qquad \nabla H_{\alpha} + H_{\alpha}\omega^{0}_{0} - \omega^{0}_{\alpha} = H_{\alpha\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.24)$$

$$\mathcal{N}_{\alpha} = \frac{1}{\ell}H^{i}_{\alpha i}, \qquad \nabla \mathcal{N}_{\alpha} + \mathcal{N}_{\alpha}\omega^{0}_{0} - \omega^{0}_{\alpha} = \mathcal{N}_{\alpha\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.25)$$

$$W_{p} = \Lambda^{n}_{pn} + \Lambda^{n}_{pq}\nu^{q}_{n}, \qquad \nabla W_{p} + W_{p}\omega^{0}_{0} - \omega^{0}_{p} = W_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.26)$$

$$W_{i} = \mathcal{M}^{n}_{in} + \mathcal{M}^{n}_{ij}\nu^{j}_{n}, \qquad \nabla W_{i} + W_{i}\omega^{0}_{0} - \omega^{0}_{i} = W_{i\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.27)$$

$$W_{\alpha} = H^{n}_{\alpha n} + H^{n}_{\alpha\beta}\nu^{\beta}_{n}, \qquad \nabla W_{\alpha} + W_{\alpha}\omega^{0}_{0} - \omega^{0}_{\alpha} = W_{\alpha\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.28)$$

$$\mathfrak{M}_{p} = \frac{1}{r+2}\bar{\Lambda}_{p} + \Lambda^{n}_{qp}\nu^{q}_{n}, \qquad \nabla \mathfrak{M}_{p} + \mathfrak{M}_{p}\omega^{0}_{0} + \omega^{0}_{p} = \mathfrak{M}_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.29)$$

$$\mathfrak{M}_{i} = \frac{1}{r}\bar{\Lambda}_{i} + \mathcal{M}^{n}_{ji}\nu^{j}_{n}, \qquad \nabla \mathfrak{M}_{i} + \mathfrak{M}_{i}\omega^{0}_{0} + \omega^{0}_{i} = \mathfrak{M}_{i\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.30)$$

$$\mathfrak{M}_{\alpha} = \frac{1}{r}\tilde{\Lambda}_{\alpha} + H^{n}_{\beta\alpha}\nu^{\beta}_{n}, \qquad \nabla \mathfrak{M}_{\alpha} + \mathfrak{M}_{\alpha}\omega^{0}_{0} + \omega^{0}_{\alpha} = \mathfrak{M}_{\alpha\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.31)$$

$$\mathcal{D}_{p} = \frac{1}{\ell}\widetilde{\mathcal{M}}_{p} + \Lambda^{n}_{qp}\nu^{q}_{n}, \qquad \nabla \mathcal{D}_{p} + \mathcal{D}_{p}\omega^{0}_{0} + \omega^{0}_{p} = \mathcal{D}_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.32)$$

$$\mathcal{D}_{i} = \frac{1}{\ell+2}\widetilde{\mathcal{M}}_{i} + \mathcal{M}^{n}_{ji}\nu^{j}_{n}, \qquad \nabla \mathcal{D}_{i} + \mathcal{D}_{i}\omega^{0}_{0} + \omega^{0}_{i} = \mathcal{D}_{i\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.33)$$

$$\mathcal{D}_{\alpha} = \frac{1}{\ell}\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha} + H^{n}_{\beta\alpha}\nu^{\beta}_{n}, \qquad \nabla \mathcal{D}_{\alpha} + \mathcal{D}_{\alpha}\omega^{0}_{0} + \omega^{0}_{\alpha} = \mathcal{D}_{\alpha\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.34)$$

где в качестве величин $\{\nu^{p}_{n}\}$, $\{\nu^{i}_{n}\}$, $\{\nu^{\alpha}_{n}\}$ берем любой из соответствующих квазитензоров (2.16)-(2.18). Построения основных фундаментальных геометрических объектов с использованием квазитензоров (2.16)-(2.18),(2.20)-(2.23) в окрестностях 1-го - 3-го порядков проводятся для скомпонованного распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$ аналогично, как и для $\mathcal{H}$-распределения [1].

§3. Инвариантные оснащения распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$

1. Нормализации Нордена-Чакмазяна основных структурных распределений, ассоциированных с распределением $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$

Под двойственной нормализацией [12] (нормализацией Нордена-Чакмазяна) базисного Λ-распределения (по аналогии с гиперполосным распределением [3]) мы будем понимать нормализацию базисного Λ-распределения (распределения $\mathcal{H}_{r}$) в смысле А.П.Нордена [13], причем в каждом центре A_0 нормаль 1-го рода $\mathcal{N}_{n-r}(A_0)$ проходит через характеристику $X_{n-r-1}(A_0)$ текущего элемента $\Pi_{r-1}(A_0) \stackrel{def}{=} H(A_0)$ оснащающего распределения $\mathcal{H}_{n-1}$ гиперплоскостей Π_{n-1}. Требование инвариантности нормали $\mathcal{N}_{n-r}(A_0) = [X_{n-r-1}, \hat{\mathcal{X}}_{n}]$, где

$$\hat{\mathcal{X}}_{n}(\nu) = A_{n} + \nu^{p}_{n}A_{p} + \nu^{i}_{n}A_{i} + \nu^{\alpha}_{n}A_{\alpha}, \qquad (3.1)$$

приводит к условиям

$$\nabla \nu^{p}_{n} + \omega^{p}_{n} = \nu^{p}_{n\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (3.2)$$

причем на величины ν^{i}_{n}, ν^{α}_{n} это требование никаких условий не накладывает. Если еще потребовать, чтобы прямая $\mathcal{N}_{1} = [A_0, \hat{\mathcal{X}}_{n}]$ была инвариантна, то, кроме условий (3.2), мы находим, что величины ν^{i}_{n}, ν^{α}_{n} должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\nabla \nu^{i}_{n} + \omega^{i}_{n} = \nu^{i}_{n\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad \nabla \nu^{\alpha}_{n} + \omega^{\alpha}_{n} = \nu^{\alpha}_{n\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}. \qquad (3.3)$$

Поле нормалей 1-го рода $\mathcal{N}_{n-r}$ внутренним образом определено в окрестности 1-го порядка, если охват объекта $\{\nu^{p}_{n}\}$ осуществить с помощью любого из квазитензоров 1-го порядка (2.16). Если, кроме того, охват объектов $\{\nu^{i}_{n}\}$, $\{\nu^{\alpha}_{n}\}$ осуществить с помощью соответствующих квазитензоров (2.17),(2.18), то внутренним инвариантным образом определяется в окрестности 1-го порядка поле прямых $N_1=[A_0,\hat{x}_n]$ -поле нормалей 1-го рода оснащающего распределения $\mathcal{H}_{n-1}$.

Нормаль 2-го рода $\mathcal{N}_{r-1}$ базисного распределения $\mathcal{H}_r$ определим точками

$$\mathcal{L}_p = A_p + \nu_p^0 A_0. \qquad (3.4)$$

Требование инвариантности поля плоскостей $\mathcal{N}_{r-1}$ приводит к условиям

$$\nabla \nu_p^0 + \omega_p^0 = \nu_{pK}^0 \omega_0^K. \qquad (3.5)$$

Следовательно, поле любого из квазитензоров $\{-M_p^0\}$ (2.22), $\{-L_p^0\}$ (2.23), $\{-W_p^0\}$ (2.26), $\{\mathfrak{M}_p^0\}$ (2.29), $\{\mathfrak{D}_p^0\}$ (2.32) задает в окрестности 1-го порядка поле внутренних нормалей 2-го рода $\mathcal{N}_{r-1}$ базисного Λ-распределения, а поле любого из квазитензоров $\{f_p^0\}$, $\{\hat{f}_p^0\}$ [1, §3] определяет поле нормалей 2-го рода $\mathcal{N}_{r-1}$ базисного Λ-распределения в окрестности 2-го порядка.

Аналогично вводим двойственную нормализацию в смысле Нордена-Чакмазяна для оснащающего распределения $\mathcal{H}_m$ (M-распределения): нормаль 1-го рода - плоскость $N_{n-m}(A_0)=[\chi_{n-m-1},\hat{x}_n]$, нормаль 2-го рода - плоскость $\mathcal{N}_{m-1}(A_0)\subset \Pi_m(A_0)$, $A_0\notin \mathcal{N}_{m-1}$, которую определим точками $\{\mathcal{L}_a\}$:

$$\mathcal{L}_p = A_p + \nu_p^0 A_0, \quad \mathcal{L}_i = A_i + \nu_i^0 A_0. \qquad (3.6)$$

Условия инвариантности нормалей 1-го и 2-го рода оснащающего распределения $\mathcal{H}_m$ имеют соответственно вид

$$\nabla\nu_n^p + \omega_n^p = \nu_{nK}^p\omega_0^K, \qquad \nabla\nu_n^i+\omega_n^i = \nu_{nK}^i\omega_0^K, \qquad (3.7)$$

$$\nabla\nu_p^0+\omega_p^0 = \nu_{pK}^0\omega_0^K, \qquad \nabla\nu_i^0+\omega_i^0=\nu_{iK}^0\omega_0^K. \qquad (3.8)$$

Охваты объектов $\{\nu_n^p\},\{\nu_p^0\}$ указаны выше. Охват объекта $\{\nu_n^i\}$ можно осуществить с помощью любого из квазитензоров 1-го порядка (2.17), а объекта $\{\nu_i^0\}$ - с помощью любого из квазитензоров 1-го порядка $\{-M_i^0\}$ (2.20), $\{-L_i^0\}$ (2.21), $\{-W_i^0\}$ (2.27), $\{\mathfrak{M}_i^0\}$ (2.30), $\{\mathfrak{D}_i^0\}$ (2.33) или с помощью любого из квазитензоров 2-го порядка $\{f_i^0\}$, $\{\hat{f}_i^0\}$ [1, §3].

Для остальных основных структурных распределений $\mathcal{H}_{n-r-1}$, $\mathcal{H}_{n-m-1}$, $\mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_{n-\ell-1}$ определим двойственные нормализации в смысле Нордена-Чакмазяна следующим образом.

а) Для распределения $\mathcal{H}_{n-r-1}$: плоскость $N_{r+1}(A_0)=[A_0,\mathcal{L}_p,\hat{x}_n]$ — нормаль 1-го рода, а плоскость $\mathcal{N}_{n-r-2}(A_0)=[\mathcal{L}_\alpha,\mathcal{L}_i]$ — нормаль 2-го рода, условия инвариантности которых соответственно имеют вид:

$$\nabla\nu_n^i+\omega_n^i=\nu_{nK}^i\omega_0^K,\qquad \nabla\nu_n^\alpha+\omega_n^\alpha=\nu_{nK}^\alpha\omega_0^K, \qquad (3.9)$$

$$\nabla\nu_i^0+\omega_i^0=\nu_{iK}^0\omega_0^K,\qquad \nabla\nu_\alpha^0+\omega_\alpha^0=\nu_{\alpha K}^0\omega_0^K. \qquad (3.10)$$

Здесь охват объекта $\{\nu_n^\alpha\}$ можно осуществить с помощью любого из квазитензоров 1-го порядка (2.18), а охват объекта $\{\nu_\alpha^0\}$ - с помощью любого из квазитензоров 1-го порядка $\{-H_\alpha^0\}$ (2.24), $\{-N_\alpha^0\}$ (2.25), $\{-W_\alpha^0\}$ (2.28), $\{\mathfrak{M}_\alpha^0\}$ (2.31), $\{\mathfrak{D}_\alpha^0\}$ (2.34) или с помощью любого из квазитензоров $\{f_\alpha^0\}$, $\{\hat{f}_\alpha^0\}$ [1, §3] 2-го порядка.

в) Для распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$: плоскость $N_{m+1}(A_0)=[A_0,\mathcal{L}_a,\hat{x}_n]$ - нормаль 1-го рода; плоскость $\mathcal{N}_{n-m-2}(A_0)=[\mathcal{L}_\alpha]$ -нормаль 2-го рода. Поле нормалей 1-го рода $N_{m+1}(A_0)$ распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$ определяется заданием поля квазитензора $\{\nu_n^\alpha\}$, а поле нормалей 2-го рода $\mathcal{N}_{n-m-2}(A_0)$ определяется заданием поля квазитензора $\{\nu_\alpha^0\}$.

с) Для распределения $\mathcal{H}_\ell$: плоскость $N_{n-\ell}=[\chi_{n-\ell-1},\hat{x}_n]$-нормаль 1-го рода; плоскость $\mathcal{N}_{\ell-1}(A_0)=[\mathcal{L}_i]$-нормаль 2-го рода. Поля нормалей 1-го и 2-го рода распределения $\mathcal{H}_\ell$ определяются соответственно заданием полей квазитензоров $\{\nu_n^i\}$ и $\{\nu_i^0\}$.

d) Для распределения $\mathcal{H}_{n-\ell-1}$: плоскость $N_{\ell+1}(A_0)=[A_0,\mathcal{L}_i,\hat{x}_n]$-нормаль 1-го рода. Поле нормалей 1-го рода $N_{\ell+1}$ для распределения $\mathcal{H}_{n-\ell-1}$ определяется заданием полей квазитензоров $\{\nu_n^p\}$, $\{\nu_n^\alpha\}$, а поле нормалей 2-го рода $\mathcal{N}_{n-\ell-2}$ распределения $\mathcal{H}_{n-\ell-1}$ определяется заданием полей квазитензоров $\{\nu_p^0\},\{\nu_\alpha^0\}$.

е) Для распределения $\mathcal{H}_{n-1}$: прямая $N_1(A_0)=[A_0,\hat{x}_n]$-нормаль 1-го рода, а в качестве нормали 2-го рода можно взять плоскость $\mathcal{N}_{n-2}(A_0)=[\mathcal{L}_a,\mathcal{L}_\alpha]$, где

$$\mathcal{L}_\alpha=A_\alpha+\nu_\alpha^0A_0,\quad \nabla\nu_\alpha^0+\omega_\alpha^0=\nu_{\alpha K}^0\omega_0^K. \qquad (3.11)$$

2. Поля квазинормалей и нормалей основных структурных распределений данного распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^r$

О п р е д е л е н и е 3 ([10], [3]). Систему величин $\{x_p\}$ назовем квазинормалью базисного распределения $\mathcal{H}_r$, если в выбранном репере 1-го порядка при преобразованиях стационарной подгруппы элемента распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^r$ имеем один из следующих законов преобразования:

$$\nabla_\delta K_p + K_p \pi^0_0 = \lambda b^n_{pq}\pi^q_n + \sigma\pi^0_p, \tag{3.12}$$

$$\nabla_\delta K_p + K_p\pi^0_0 = \lambda\Lambda^n_{pq}\pi^q_n + \sigma\pi^0_p, \tag{3.13}$$

$$\nabla_\delta K_p + K_p\pi^0_0 = \lambda\Lambda^n_{qp}\pi^q_n - \sigma\pi^0_p, \tag{3.14}$$

где λ, σ –постоянные числа,отличные от нуля.

Каждая из этих трех типов квазинормалей устанавливает биекцию между нормалями 1-го и 2-го рода базисного распределения $\mathcal{H}_r$ таким образом:

а) $\nu^0_p = -\frac{1}{\sigma}(K_p + \lambda b^n_{pq}\nu^q_n), \quad \nu^t_n = -\frac{1}{\lambda}(K_p+\sigma\nu^0_p)\, b^{pt}_n,$ (3.15)

если $\{K_p\}$ –квазинормаль 1-го типа (3.12).

в) $\nu^0_p = -\frac{1}{\sigma}(K_p + \lambda\Lambda^n_{pq}\nu^q_n), \quad \nu^t_n = -\frac{1}{\lambda}\Lambda^{tp}_n(K_p+\sigma\nu^0_p),$ (3.16)

если $\{K_p\}$ –квазинормаль 2-го типа (3.13).

с) $\nu^0_p = -\frac{1}{\sigma}(K_p+\lambda\Lambda^n_{qp}\nu^q_n), \quad \nu^t_n = -\frac{1}{\lambda}(K_p+\sigma\nu^0_p)\Lambda^{pt}_n,$ (3.17)

если $\{K_p\}$ –квазинормаль 3-го типа (3.14).

В разных дифференциальных окрестностях определим следующие квазинормали базисного распределения $\mathcal{H}_r$ [3]:

а) в окрестности 1-го порядка

$$K^1_p = \frac{1}{n-r}\Lambda^{\hat u}_{p\hat u},\ K^2_p = \frac{1}{l+1}\Lambda^{\hat t}_{p\hat t},\ K^3_p = \frac{1}{n-m}\Lambda^{\hat\alpha}_{p\hat\alpha},\ K^4_p=\Lambda^n_{pn}; \tag{3.18}$$

в)в окрестности 2-го порядка

$$K^5_p = \frac{1}{r+2}\widetilde{\Lambda}_p,\quad \hat{K}^5_p = \frac{1}{l}\widetilde{M}_p,\quad K^6_p = b_p; \tag{3.19}$$

с)в окрестности 3-го порядка

$$K^7_p = C_p;\quad \hat{K}^7_p = C_p + 3B_p. \tag{3.20}$$

Учитывая дифференциальные уравнения (1.3),(1.8),(1.11) и дифференциальные уравнения для величин $\widetilde{\Lambda}_p, \widetilde{M}_p, b_p, C_p, B_p$ [3,§§3–4], убеждаемся в том,что квазинормали (3.18)- (3.20) удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\nabla_\delta K^1_p + K^1_p\pi^0_0 = \frac{1}{n-r}\Lambda^n_{pq}\pi^q_n + \pi^0_p, \tag{3.21}$$

$$\nabla_\delta K^2_p + K^2_p\pi^0_0 = \frac{1}{l+1}\Lambda^n_{pq}\pi^q_n + \pi^0_p, \tag{3.22}$$

$$\nabla_\delta K^3_p + K^3_p\pi^0_0 = \frac{1}{n-m}\Lambda^n_{pq}\pi^q_n + \pi^0_p, \tag{3.23}$$

$$\nabla_\delta K^4_p + K^4_p\pi^0_0 = \Lambda^n_{pq}\pi^q_n + \pi^0_p, \tag{3.24}$$

$$\nabla_\delta K^5_p + K^5_p\pi^0_0 = \Lambda^n_{qp}\pi^q_n - \pi^0_p, \tag{3.25}$$

$$\nabla_\delta \hat{K}^5_p + \hat{K}^5_p\pi^0_0 = \Lambda^n_{qp}\pi^q_n - \pi^0_p, \tag{3.26}$$

$$\nabla_\delta K^6_p + K^6_p\pi^0_0 = b^n_{ps}\pi^s_n - \pi^0_p, \tag{3.27}$$

$$\nabla_\delta K^7_p + K^7_p\pi^0_0 = -\Lambda^n_{qp}\pi^q_n - \pi^0_p, \tag{3.28}$$

$$\nabla_\delta \hat{K}^7_p + \hat{K}^7_p\pi^0_0 = 2b^n_{pq}\pi^q_n - 4\pi^0_p. \tag{3.29}$$

Следуя работе [3] , будем определять нормали $\{\nu^p_n\},\{\nu^0_p\}$ I-го и 2-го рода распределения $\mathcal{H}_r$,используя способ нахождения общих нормалей (в общем случае – единственных) двух квазинормалей.

I)В окрестности I-го порядка.

а)Пара (K^1_p, K^4_p) определяет инвариантные нормали I-го и 2-го рода следующего вида:

$$\mathcal{L}^p_n = -\frac{n-r}{n-r-1}\Lambda^{pq}_n(K^4_q - K^1_q),\quad \mathcal{L}^0_p = -\frac{1}{n-r-1}[(n-r)K^1_p - K^4_p]. \tag{3.30}$$

Далее мы коротко это соответствие будем обозначать так:

$$(K^1_p, K^4_p) \longrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}^p_n = -\frac{n-r}{n-r-1}\Lambda^{pq}_n(K^4_q - K^1_q), \\ \mathcal{L}^0_p = -\frac{1}{n-r-1}[(n-r)K^1_p - K^4_p]. \end{cases} \tag{3.31}$$

в)

$$(K^2_p, K^4_p) \longrightarrow \begin{cases} \mathcal{B}^p_n = -\frac{l+1}{l}\Lambda^{pq}_n(K^4_q - K^2_q), \\ \mathcal{B}^0_p = -\frac{1}{l}[(l+1)K^2_p - K^4_p]. \end{cases} \tag{3.32}$$

$$
\text{c)}\quad (\mathcal{K}^3_p, \mathcal{K}^4_p) \longrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}^p_n = -\frac{n-m}{n-m-1}(\mathcal{K}^4_q - \mathcal{K}^3_q)\Lambda^{pq}_n, \\ \mathcal{L}^0_p = -\frac{1}{n-m-1}[(n-m)\mathcal{K}^3_p - \mathcal{K}^4_p]. \end{cases} \tag{3.33}
$$

2) В окрестности 2-го порядка при $\tau^n_{pq} = 0$

$$
(\mathcal{K}^4_p, \mathcal{K}^5_p) \longrightarrow \begin{cases} H^p_n = -\frac{1}{2} b^{pq}_n (\mathcal{K}^4_q + \mathcal{K}^5_q), \\ H^0_p = \frac{1}{2}(\mathcal{K}^5_p - \mathcal{K}^4_p). \end{cases} \tag{3.34}
$$

$$
(\mathcal{K}^4_p, \hat{\mathcal{K}}^5_p) \longrightarrow \begin{cases} \tilde{H}^p_n = -\frac{1}{2} b^{pq}_n (\mathcal{K}^4_q + \hat{\mathcal{K}}^5_q), \\ \tilde{H}^0_p = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{K}}^5_p - \mathcal{K}^4_p). \end{cases} \tag{3.35}
$$

Каждая из пар квазитензоров $(\mathcal{K}^4_p, \mathcal{K}^5_p)$, $(\mathcal{K}^4_p, \hat{\mathcal{K}}^5_p)$ при $\tau^n_{pq} \neq 0$ общей нормали 2-го рода не имеет.

3)В окрестности 3-го порядка.

а)Пара $(\mathcal{K}^6_p, \hat{\mathcal{K}}^7_p)$ задает инвариантные нормали I-го и 2-го рода вида

$$
\Phi^p_n = \frac{1}{2} b^{pq}_n (\hat{\mathcal{K}}^7_q - 4\mathcal{K}^6_q), \quad \Phi^0_p = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{K}}^7_p - 2\mathcal{K}^6_p). \tag{3.36}
$$

Заметим,что в случае регулярной гиперполосы,а также для регулярного гиперполосного распределения [3] нормали (3.36) являются аналогами нормалей Фубини. В силу этого нормали (3.36) мы назовем первыми аналогами нормалей Фубини базисного распределения $\mathcal{H}_\tau$ или,что то же,первыми аналогами нормалей Фубини распределения $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$,ассоциированными с базисным распределением $\mathcal{H}_\tau$.

$$
\text{в)}\quad (\mathcal{K}^7_p, \mathcal{K}^5_p) \longrightarrow \begin{cases} T^p_n = \frac{1}{2}\Lambda^{qp}_n(\mathcal{K}^7_q - \mathcal{K}^5_q), \\ T^0_p = \frac{1}{2}(\mathcal{K}^5_p + \mathcal{K}^7_p). \end{cases} \tag{3.37}
$$

$$
\text{с)}\quad (\mathcal{K}^7_p, \hat{\mathcal{K}}^5_p) \longrightarrow \begin{cases} \hat{T}^p_n = \frac{1}{2}\Lambda^{qp}_n(\mathcal{K}^7_q - \hat{\mathcal{K}}^5_q), \\ \hat{T}^0_p = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{K}}^5_p + \mathcal{K}^7_p). \end{cases} \tag{3.38}
$$

Известно [1,§5] ,что квазитензоры 2-го порядка $\{\mathcal{M}^p_n\}$,$\{\mathcal{M}^0_p\}$, где

$$
\mathcal{M}^p_n \overset{def}{=} -\frac{1}{2(\tau+2)}\Lambda^{ps}_n b^{qt}_n(\Lambda^n_{sqt} + \Lambda^n_{sq}\mathcal{K}^4_t + \Lambda^n_{st}\mathcal{K}^4_q + \Lambda^n_{tq}\mathcal{K}^4_s), \tag{3.39}
$$

$$
\mathcal{M}^0_p \overset{def}{=} -[\mathcal{K}^4_p - \frac{1}{2(\tau+2)} b^{qt}_n(\Lambda^n_{pqt} + \Lambda^n_{pq}\mathcal{K}^4_t + \Lambda^n_{pt}\mathcal{K}^4_q + \Lambda^n_{tq}\mathcal{K}^4_p)], \tag{3.40}
$$

задают для $\mathcal{H}$-распределения вторые аналоги нормалей Михэйлеску.Так как для скомпонованного распределения $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$ квазитензоры $\{\hat{\mathcal{K}}^3_p\}$, $\{\hat{\mathcal{K}}^4_p\}$ [1;§5] совпадают соответственно с квазитензорами $\{\mathcal{K}^3_p\}$, $\{\mathcal{K}^4_p\}$(3.18),то для него первые и вторые аналоги нормалей Михэйлеску совпадают.Следовательно,охваты компонент нормалей Михэйлеску I-го и 2-го рода для скомпонованного распределения $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$ определяются соответственно по формулам (3.38) , (3.39).Для распределения $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$ при $\tau^n_{pq}=0$ нормали 1-го и 2-го рода Михэйлеску имеют вид:

$$
m^p_n = -\frac{1}{2} b^{pt}_n(\mathcal{K}^6_t + \mathcal{K}^4_t), \quad m^0_p = \frac{1}{2}(\mathcal{K}^6_p - \mathcal{K}^4_p). \tag{3.41}
$$

Приведем примеры построения двойственных нормалей распределения $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$,пользуясь биекциями (3.15)-(3.17),устанавливаемыми квазинормалями в окрестности 3-го порядка элемента распределения $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$.Квазитензоры $\{-W^p_n\}$, $\{F^p_n\}$ [1,§4] 3-го порядка при τ^n_{pq}=0 удовлетворяют уравнениям (3.7).Следовательно,квазитензоры $\{-W^p_n\}$,$\{F^p_n\}$ определяют поля инвариантных нормалей I-го рода распределения $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$ в окрестности 3-го порядка.В биекции,определенной,например,квазинормалью $\{\mathcal{K}^6_p\}$, этим нормалям согласно (3.27),(3.15)(при $\sigma=-1, \lambda=1$)соответствуют инвариантные нормали 2-го рода $\{W^0_p\}$, $\{F^0_p\}$,где

$$
\begin{cases} W^0_p = \mathcal{K}^6_p - b^n_{pq} W^q_n, \quad F^0_p = \mathcal{K}^6_p + b^n_{pq} F^q_n, \\ \nabla W^0_p + \omega^0_p = W^0_{p\varkappa}\omega^\varkappa_0, \quad \nabla F^0_p + \omega^0_p = F^0_{p\varkappa}\omega^\varkappa_0. \end{cases} \tag{3.42}
$$

Пара нормалей $\{-W^p_n, W^0_p\}$ в случае регулярной гиперполосы $H_\tau \subset P_n$, а также в случае регулярного гиперполосного распределения $\mathcal{H}^\tau_{n-1}$ [3],определяет аналог нормалей Вильчинского,а пара $\{F^p_n, F^0_p\}$ - аналог нормалей Фубини.Учитывая это,мы назовем нормали $\{-W^p_n, W^0_p\}$ нормалями Вильчинского распределения $\mathcal{H}_\tau$,а нормали $\{F^p_n, F^0_p\}$ - вторыми аналогами нормалей Фубини распределения $\mathcal{H}_\tau$ (в отличие от первых аналогов нормалей Фубини (3.36)).

Для распределений $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$ также,как и для гиперполосных распределений [3] ,имеет место предложение: на голономных распределениях $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$ и на распределениях $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$ с нулевым тензором $\{\tau^n_{pq}\}$ обе нормализации Фубини совпадают.

Совершенно аналогичные построения (§3,п.2) можно провести, используя квазинормали,ассоциированные с основными структурными распределениями $\mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_{n-m-1}$ данного распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$. Здесь мы приведем только охваты характерных квазинормалей, ассоциированных с распределениями $\mathcal{H}_\ell, \mathcal{H}_{n-m-1}$. Для распределения $\mathcal{H}_\ell$ имеем:

I) В окрестности I-го порядка

$$\begin{cases} \mathcal{K}^1_i = \frac{1}{n-m}\left(M^\alpha_{i\alpha} + M^n_{in}\right), \ \nabla_\delta \mathcal{K}^1_i + \mathcal{K}^1_i \pi^0_0 = \frac{1}{n-m} M^n_{ij} \pi^j_n + \pi^0_i; \\ \mathcal{K}^2_i = \Lambda^n_{in}; \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^2_i + \mathcal{K}^2_i \pi^0_0 = M^n_{ij} \pi^j_n + \pi^0_i. \end{cases} \tag{3.43}$$

2) В окрестности 2-го порядка

$$\mathcal{K}^3_i = \frac{1}{n-\ell} M^{\hat\lambda}_{i\hat\lambda}, \ \nabla_\delta \mathcal{K}^3_i + \mathcal{K}^3_i \pi^0_0 = \frac{1}{n-\ell} M^n_{ij} \pi^j_n + \pi^0_i, \tag{3.44}$$

$$\mathcal{K}^4_i = \frac{1}{r+1} M^{\hat p}_{i\hat p}, \ \nabla_\delta \mathcal{K}^4_i + \mathcal{K}^4_i \pi^0_0 = \frac{1}{r+1} M^n_{ij} \pi^j_n + \pi^0_i, \tag{3.45}$$

$$\mathcal{K}^5_i = e_i, \ \nabla_\delta \mathcal{K}^5_i + \mathcal{K}^5_i \pi^0_0 = m^n_{ik} \pi^k_n - \pi^0_i. \tag{3.46}$$

3) В окрестности 3-го порядка

$$\mathcal{K}^6_i = \frac{1}{r}\tilde\Lambda_i, \ \nabla_\delta \mathcal{K}^6_i + \mathcal{K}^6_i \pi^0_0 = M^n_{ji} \pi^j_n - \pi^0_i, \tag{3.47}$$

$$\hat{\mathcal{K}}^6_i = \frac{1}{\ell+2}\tilde M_i, \ \nabla_\delta \hat{\mathcal{K}}^6_i + \hat{\mathcal{K}}^6_i \pi^0_0 = M^n_{ji} \pi^j_n - \pi^0_i, \tag{3.48}$$

$$\hat{\mathcal{K}}^7_i = \mathcal{D}_i, \ \nabla_\delta \hat{\mathcal{K}}^7_i + \hat{\mathcal{K}}^7_i \pi^0_0 = -\Lambda^n_{ji} \pi^j_n - \pi^0_i, \tag{3.49}$$

$$\mathcal{K}^7_i = \mathcal{D}_i + 3E_i, \ \nabla_\delta \mathcal{K}^7_i + \mathcal{K}^7_i \pi^0_0 = 2\left(m^n_{ik} \pi^k_n - 2\pi^0_i\right). \tag{3.50}$$

Квазитензоры, ассоциированные с распределением $\mathcal{H}_{n-m-1}$, имеют следующий вид:

1)В окрестности 1-го порядка

$$\mathcal{K}^1_\alpha = H^n_{\alpha n}, \quad \nabla \mathcal{K}^1_\alpha + \mathcal{K}^1_\alpha \pi^0_0 = H^n_{\alpha\beta} \pi^\beta_n + \pi^0_\alpha. \tag{3.51}$$

2)В окрестности 2-го порядка

$$\mathcal{K}^2_\alpha = \frac{1}{m+1} H^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\alpha}, \ \nabla_\delta \mathcal{K}^2_\alpha + \mathcal{K}^2_\alpha \pi^0_0 = \frac{1}{m+1} H^n_{\alpha\beta} \pi^\beta_n + \pi^0_\alpha, \tag{3.52}$$

$$\mathcal{K}^3_\alpha = \frac{1}{r+1} H^{\hat p}_{\alpha\hat p}, \ \nabla_\delta \mathcal{K}^3_\alpha + \mathcal{K}^3_\alpha \pi^0_0 = \frac{1}{r+1} H^n_{\alpha\beta} \pi^\beta_n + \pi^0_\alpha, \tag{3.53}$$

$$\mathcal{K}^4_\alpha = \frac{1}{\ell+1} H^{\hat r}_{\alpha\hat r}, \ \nabla_\delta \mathcal{K}^4_\alpha + \mathcal{K}^4_\alpha \pi^0_0 = \frac{1}{\ell+1} H^n_{\alpha\beta} \pi^\beta_n + \pi^0_\alpha, \tag{3.54}$$

$$\mathcal{K}^5_\alpha = h_\alpha, \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^5_\alpha + \mathcal{K}^5_\alpha \pi^0_0 = h^n_{\alpha\beta} \pi^\beta_n - \pi^0_\alpha. \tag{3.55}$$

3) В окрестности 3-го порядка

$$\mathcal{K}^6_\alpha = \frac{1}{r}\tilde\Lambda_\alpha, \ \nabla_\delta \mathcal{K}^6_\alpha + \mathcal{K}^6_\alpha \pi^0_0 = H^n_{\beta\alpha} \pi^\beta_\alpha - \pi^0_\alpha, \tag{3.56}$$

$$\hat{\mathcal{K}}^6_\alpha = \frac{1}{\ell}\tilde M_\alpha, \ \nabla_\delta \hat{\mathcal{K}}^6_\alpha + \hat{\mathcal{K}}^6_\alpha \pi^0_0 = H^n_{\beta\alpha} \pi^\beta_\alpha - \pi^0_\alpha, \tag{3.57}$$

$$\hat{\mathcal{K}}^7_\alpha = \hat B_\alpha, \ \nabla_\delta \hat{\mathcal{K}}^7_\alpha + \hat{\mathcal{K}}^7_\alpha \pi^0_0 = -H^n_{\beta\alpha} \pi^\beta_n - \pi^0_\alpha, \tag{3.58}$$

$$\mathcal{K}^7_\alpha = \hat B_\alpha + 3\hat H_\alpha, \ \nabla_\delta \mathcal{K}^7_\alpha + \mathcal{K}^7_\alpha \pi^0_0 = 2\left(h^n_{\alpha\gamma} \pi^\gamma_n - 2\pi^0_\alpha\right). \tag{3.59}$$

3. Инвариантные оснащения в смысле Э.Картана.

а) Построим оснащение в смысле Картана для базисного распределения $\mathcal{H}_r$ плоскостей Π_r. Предварительно проведем следующие вычисления. Продолжив уравнения (3.2) и полагая $\mathcal{K} = q$, получим дифференциальные уравнения для величин

$$\nabla \nu^p_{nq} + \nu^p_{nq}\omega^0_0 + \nu^p_n \Lambda^n_{sq}\omega^s_n + \nu^s_n \Lambda^n_{sq}\omega^p_n - \nu^s_n \delta^p_q \omega^0_s - \omega^0_n \delta^p_q - \omega^u_n M^p_{uq} \equiv 0. \tag{3.60}$$

Величина

$$\nu^0_n \overset{def}{=} -\frac{1}{r}\left(\nu^p_{np} - \Lambda^n_{pq}\nu^p_n \nu^q_n\right) \tag{3.61}$$

в силу (3.60),(1.2),(2.19),(2.21),(2.24) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla \nu^0_k + \nu^p_k \omega^0_p + H^0_\alpha \omega^\alpha_n + M^0_i \omega^i_n + \omega^0_n = \nu^0_{nk}\omega^k_0. \tag{3.62}$$

Итак, построим инвариантную оснащающую плоскость $\bar\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)(A_0)$, принадлежащую нормали I-го рода $\mathcal{N}_{n-r}(\nu^p_n)(A_0)$ базисного распределения $\mathcal{H}_r$. Плоскость $\bar\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)$ зададим точками

$$\mathcal{K}_u(\nu^p_n) = x^0_u A_0 + A_u; \quad \mathcal{K}_n(\nu^p_n) = x^0_n A_0 + X_n(\nu^p_n),$$

где

$$X_n(\nu^p_n) = A_n + \nu^p_n A_p + \underline{\nu}^\alpha_n A_\alpha + \underline{\nu}^i_n A_i,$$

а фиксированные квазитензоры $\{\underline{\nu}^i_n\}, \{\underline{\nu}^\alpha_n\}$ — любые из построенных квазитензоров (2.17),(2.18). Из условия инвариантности плоскости $\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)$ приходим к следующим уравнениям:

$$\nabla x^0_n+\nu^p_n\,\omega^0_p+\underline{\nu}^\alpha_n\,\omega^0_\alpha+\underline{\nu}^i_n\,\omega^0_i+\omega^0_n\equiv 0,\ \ \nabla x^0_u+\omega^0_u=x^0_{u\varkappa}\,\omega^\varkappa_0. \tag{3.63}$$

Учитывая (3.62),(2.2I),(2.24), убеждаемся, что уравнения (3.63) выполняются, если положить

$$x^0_n=\nu^0_n-\underline{\nu}^\alpha_n H^0_\alpha-\underline{\nu}^i_n L^0_i\,;\quad x^0_i=-L^0_i\,,\quad x^0_\alpha=-H^0_\alpha.$$

Таким образом, инвариантная оснащающая плоскость $\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)$ натянута на точки

$$K_\alpha=A_\alpha-H^0_\alpha A_0\,,\ K_i=A_i-L^0_i A_0\,;\ K_n(\nu^p_n)=(\nu^0_n-\underline{\nu}^\alpha_n H^0_\alpha-\underline{\nu}^i_n L^0_i)A_0+X_n(\nu^p_n) \tag{3.64}$$

и определяется уравнениями

$$x^p-\nu^p_n x^n=0,\quad x^0-\nu^0_n x^n+H^0_\alpha x^\alpha+L^0_i x^i=0. \tag{3.65}$$

Плоскость $\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)$(3.64) пересекает характеристику $X_{n-r-1}(A_0)$ гиперплоскости $\Pi_{n-1}(A_0)$ по $(n-r-2)$-мерной плоскости π_{n-r-2}:

$$x^n=x^p=0\,;\quad x^0+L^0_i x^i+H^0_\alpha x^\alpha=0. \tag{3.66}$$

Так как задание (3.66) плоскости π_{n-r-2} не зависит от выбора нормали I-го рода $N_{n-r}(\nu^p_n)$ (от выбора квазитензора $\{\nu^p_n\}$) в данной точке A_0, то, следовательно, в каждом центре A_0 распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ инвариантные оснащающие плоскости $\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)$ (3.65) принадлежат одному пучку, осью которого служит плоскость $\pi_{n-r-2}(A_0)\subset X_{n-r-1}(A_0)$. Отметим, что инвариантная точка $K_n(\nu^p_n)$ является точкой пересечения оснащающей плоскости $\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)$ с инвариантной прямой $N_1(\nu^p_n)=[A_0,X_n]$, соответствующей данной нормали $N_{n-r}(\nu^p_n)$, т.е. для распределения $\mathcal{H}_r$ точка $K_n(\nu^p_n)$ (3.64) представляет собой аналог обобщенной точки Кенигса [14], соответствующей нормали $N_{n-r}(\nu^p_n)$.

в) Аналогичным образом убеждаемся, что инвариантная оснащающая плоскость $\Pi_{n-\ell-1}(\nu^i_n)$ (плоскость Картана), принадлежащая нормали I-го рода $N_{n-\ell}(\nu^i_n)(A_0)$ распределения $\mathcal{H}_\ell$, определена точками

$$\hat{K}_\alpha=A_\alpha-\nu^0_\alpha A_0,\ \hat{K}_p=A_p-L^0_p A_0,\ \hat{K}_n(\nu^i_n)=(\varphi^0_n-\underline{\nu}^\alpha_n N^0_\alpha-\underline{\nu}^p_n L^0_p)+\nu^{\hat{u}}_n A_{\hat{u}}+A_n, \tag{3.67}$$

где $\hat{K}_n(\nu^i_n)$ -аналог обобщенной точки Кенигса [14] соответствующей нормали $N_{n-\ell}(\nu^i_n)$. Кроме того, в каждом центре A_0 рспределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ инвариантные оснащающие плоскости $\Pi_{n-\ell-1}(\nu^i_n)$ всех нормалей 1-го рода $N_{n-\ell}(\nu^i_n)$ распределения $\mathcal{H}_\ell$ принадлежат одному пучку, осью которого служит плоскость $\pi_{n-\ell-2}(A_0)\subset X_{n-\ell-1}(A_0)$. Плоскость $\pi_{n-\ell-2}(A_0)$ относительно локального репера задается уравнениями [1, §5]:

$$x^i=x^n=0,\ \ x^0+L^0_p x^p+N^0_\alpha x^\alpha=0, \tag{3.68}$$

плоскость $\Pi_{n-\ell-1}(\nu^i_n)(A_0)$ -уравнениями

$$x^i-\nu^i_n x^n=0\,,\ \ x^0-\varphi^0_n x^n+L^0_p x^p+N^0_\alpha x^\alpha=0, \tag{3.69}$$

где

$$\varphi^0_n=-\frac{1}{\ell}\,(\nu^i_{ni}-M^n_{ki}\,\nu^k_n\,\nu^i_n).$$

с) Наконец, в каждом центре A_0 оснащающую плоскость $\Pi_m(\nu^\alpha_n)(A_0)$ (плоскость Картана), принадлежащую нормали 1-го рода $N_{m+1}(A_0)$ распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$ характеристик X_{n-m-1}, зададим точками

$$\begin{cases}\tilde{K}_p=A_p-M^0_p A_0,\quad \tilde{K}_i=A_i-M^0_i A_0,\\ \tilde{K}_n(\nu^\alpha_n)=(\psi^0_n-\underline{\nu}^i_n M^0_i-\underline{\nu}^p_n M^0_p)A_0+\nu^\alpha_n A_\alpha+\underline{\nu}^a_n A_a+A_n,\end{cases} \tag{3.70}$$

где $\psi^0_n=-\frac{1}{n-m-1}(\nu^\alpha_{n\alpha}-H^n_{\gamma\alpha}\,\nu^\gamma_n\,\nu^\alpha_n)$, а $\{\underline{\nu}^p_n\},\{\underline{\nu}^i_n\}$ -любые фиксированные квазитензоры из (2.I6),(2.I7). Можно показать [1, §5], что в каждом центре A_0 распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ инвариантные оснащающие плоскости $\Pi_m(\nu^\alpha_n)(A_0)$ всех нормалей 1-го рода $N_{m+1}(\nu^\alpha_n)$ распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$ (Φ -распределения) принадлежат одному пучку, осью которого является плоскость $\pi_{m-1}(A_0)\subset X_m(A_0)$. Кроме того, точка $\tilde{K}_n(\nu^\alpha_n)$ (3.70) является аналогом обобщенной точки Кенигса [14] соответствующей нормали $N_{m+1}(\nu^\alpha_n)(A_0)$ распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$. Относительно локального репера плоскость $\pi_{m-1}(A_0)$ задается уравнениями

$$x^\alpha=x^n=0,\quad x^0+M^0_p x^p+M^0_i x^i=0, \tag{3.71}$$

а плоскость $\Pi_m(\nu^\alpha_n)(A_0)$ уравнениями

$$x^\alpha-\nu^\alpha_n x^n=0\,,\ \ x^0-\psi^0_n x^n+M^0_p x^p+M^0_i x^i=0. \tag{3.72}$$

Геометрическая интерпретация плоскостей $\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)$ (3.65),

$\mathcal{K}_{n-\ell-1}(\nu^i_n)$ (3.69), $\mathcal{K}_m(\nu^\alpha_n)$ (3.72).

§4. Фокальные образы распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$.

I.Следуя работе [10], выясним геометрический смысл квазинормалей (§3), используя фокальные образы распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$. Фокальное многообразие, соответствующее смещениям центра A_0 по кривым, принадлежащим распределению $\mathcal{H}_r$, задается уравнениями:

$$x^{\hat{u}} = 0, \quad \det \| x^0 \delta^{\hat{u}}_{\hat{v}} + x^p \Lambda^{\hat{u}}_{p\hat{v}} + x^p \Lambda^{\hat{u}}_{pq} \nu^q_n \delta^n_{\hat{v}} \| = 0. \tag{4.I}$$

В общем случае мы получаем алгебраическое многообразие размерности $r-1$ порядка $n-r$, которое обозначим символом $\mathfrak{A}^{n-r}_{r-1}(\nu^p_n)$.

Найдем уравнения линейной поляры центра A_0 распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ относительно фокального многообразия $\mathfrak{A}^{n-r}_{r-1}(\nu^p_n)$ в плоскости $\Pi_r(A_0)$:

$$x^{\hat{u}} = 0, \quad x^0 - \nu^0_p x^p = 0, \tag{4.2}$$

где

$$\nu^0_p = -\left(\mathcal{K}^1_p + \frac{1}{n-r} \Lambda^n_{pq} \nu^q_n\right). \tag{4.3}$$

Таким образом, линейная поляра (4.2) совпадает с нормалью 2-го рода $\mathcal{N}_{r-1}(\nu^0_p)(A_0)$ плоскости $\Pi_r(A_0)$, соответствующей нормали 1-го рода $N_{n-r}(\nu^p_n)(A_0)$ в биекции (4.3), устанавливаемой квазинормалью $\{\mathcal{K}^1_p\}$.

2.Фокальное многообразие $\mathcal{L}^{m+1}_{n-m-2}(\nu^\alpha_n)$ [1, §6] в плоскости $\chi_{n-m-1}(A_0)$ задается относительно локального репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ системой уравнений

$$x^{\hat{a}} = 0, \quad \det \| x^0 \delta^{\hat{a}}_{\hat{b}} + x^\alpha (H^{\hat{a}}_{\alpha\hat{b}} + H^{\hat{a}}_{\alpha\beta} \nu^\beta_n \delta^n_{\hat{b}}) \| = 0. \tag{4.4}$$

Уравнения линейной поляры центра A_0 относительно многообразия $\mathcal{L}^{m+1}_{n-m-2}(\nu^\alpha_n)$ имеют вид:

$$x^{\hat{a}} = 0, \quad x^0 - \nu^0_\alpha x^\alpha = 0, \tag{4.5}$$

где

$$\nu^0_\alpha = -\left(\mathcal{K}^2_\alpha + \frac{1}{m+1} H^n_{\alpha\beta} \nu^\beta_n\right). \tag{4.6}$$

Отсюда вытекает, что квазинормаль $\{\mathcal{K}^2_\alpha\}$ определяет проективитет Бомпьяни-Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$ характеристик χ_{n-m-1}.

3.Уравнения

$$x^{\hat{A}} = 0, \quad \det \| x^0 \delta^{\hat{A}}_{\hat{B}} + x^i (M^{\hat{A}}_{i\hat{B}} + M^{\hat{A}}_{ij} \nu^j_n \delta^n_{\hat{B}}) \| = 0 \tag{4.7}$$

в общем случае определяют $(\ell-1)$-мерное алгебраическое многообразие порядка $n-\ell$, принадлежащее плоскости $\Pi_\ell(A_0) \subset \mathcal{H}_\ell$ – фокальное многообразие $\mathfrak{A}^{n-\ell}_{\ell-1}(\nu^i_n)$, соответствующее инвариантной нормали $N_{n-\ell}(\nu^i_n)(A_0)$. Линейная поляра центра A_0 относительно фокального многообразия $\mathfrak{A}^{n-\ell}_{\ell-1}(\nu^i_n)$ распределения $\mathcal{H}_\ell$ задается уравнениями:

$$x^{\hat{A}} = 0, \quad x^0 - \nu^0_i x^i = 0, \tag{4.8}$$

где

$$\nu^0_i = -\left(\mathcal{K}^3_i + \frac{1}{n-3} M^n_{ij} \nu^j_n\right). \tag{4.9}$$

Из соотношений (4.8), (4.9) вытекает, что квазинормаль $\{\mathcal{K}^3_i\}$ определяет аналог проективитета Бомпьяни-Пантази между нормалями I-го и 2-го рода распределения $\mathcal{H}_\ell$.

4.Аналогичным образом выясняется геометрический смысл квазинормалей $\{\mathcal{K}^2_p\}, \{\mathcal{K}^4_\alpha\}, \{\mathcal{K}^4_i\}, \{\mathcal{K}^3_\alpha\}, \{\mathcal{K}^3_p\}, \{\mathcal{K}^1_i\}$:

а) Квазинормали $\{\mathcal{K}^2_p\}, \{\mathcal{K}^3_p\}$ определяют еще два аналога поляритета Бомпьяни-Пантази между нормалями I-го и 2-го рода распределения $\mathcal{H}_r$ (в отличие от найденного ранее (4.3));

в) Квазинормали $\{\mathcal{K}^4_\alpha\}, \{\mathcal{K}^3_\alpha\}$ устанавливают аналоги проективитета Бомпьяни-Пантази для распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$ (в отличие от проективитета (4.6));

с) Квазинормали $\{\mathcal{K}^4_i\}, \{\mathcal{K}^1_i\}$ задают аналоги поляритета Бомпьяни-Пантази нормалей 1-го и 2-го рода распределения $\mathcal{H}_\ell$ (в отличие от поляритета (4.9)).

Библиографический список

1.П о п о в Ю.И. Трехсоставные регулярные распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ проективного пространства /Калинингр.ун-т.Калининград, 1982.126с.Библиогр.20 назв.Деп.в ВИНИТИ.16.12.82.№ 6192-82.

2.Н о р д е н А.П. Теория композиций //Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М., 1978.Т.10.С.117-145.

3.С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1975.Т.7,С.117-151.

4.Попов Ю.И. Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства.I/ Калинингр. ун-т.Калининград,1984.93с.Библиогр.21 назв. Деп. в ВИНИТИ.2.07.84.№ 4481-84.

5.Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов// Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.29-48.

6.Попов Ю.И. О полях геометрических объектов многомерной распадающейся гиперполосы проективного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1977.Вып.8.С.43-70.

7.Атанасян Л.С. К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства//Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина.М.,1957.Т.108.Вып.2.С.3-44.

8.Попов Ю.И. Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n //Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр/ Калинингр.ун-т.Калининград,1970.Вып.6.С.27-46.

9.Попов Ю.И. Внутренние оснащения вырожденной m-мерной гиперполосы H_m^r ранга r многомерного проективного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб. науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1975.Вып.6.С.102-142.

10.Лаптев Г.Ф.,Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ,М.,1971.Т.3.С.49-94.

11.Акивис М.А. О строении двухкомпонентных сопряженных систем//Тр.геометр.семинара/ ВИНИТИ.М.,1966.Т.1.С.7-31.

12.Чакмазян А.В. Двойственная нормализация/Докл. АН Арм.ССР.1959.Т.28.№4.С.151-157.

13.Норден А.П. Пространства аффинной связности.М.: Наука,1976.

14.Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве//Тр.геометр.семинара / ВИНИТИ.М.,1973.Т.4.С.71-120.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ МНОГООБРАЗИЯ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРЫ

М.М.Похила,Т.Н.Балазюк
(Черновицкий ун-т)

В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы геометрии подмногообразий M_n многообразия почти комплексной структуры $M_n(J)$,оснащенных таким полем нормалей N ,что в каждой точке $x \in M_m$ соответствующая нормаль N_x пересекает образ $J T_x(M_m)$ касательного к подмногообразию пространства $T_x(M_m)$ по подпространству постоянной размерности r .
Считаем,что $0 < r < n-m < m$.

Пусть $M_n(J)$ n-мерное многообразие почти комплексной структуры со структурными формами ω^J $(J,K,L=\overline{1,n})$. Зададим на многообразии $M_n(J)$ поле объекта линейной связности $\Gamma=\{\Gamma^J_{KL}\}$, присоединенного к группе $\mathcal{D}^2_n$:

$$d\Gamma^J_{JK}-\Gamma^J_{LK}\omega^L_J-\Gamma^J_{JL}\omega^L_K+\Gamma^L_{JK}\omega^J_L-\Gamma^M_{JK}\Gamma^J_{ML}\omega^L+\omega^J_{JK}=\Gamma^J_{JKL}\omega^L. \qquad (1)$$

Если m-мерное подмногообразие M_m многообразия $M_n(J,\Gamma)$ задано системой дифференциальных уравнений

$$\omega^J=\Lambda^J_i\theta^i \qquad (i,j\ldots=\overline{1,m}), \qquad (2)$$

то $\{\Lambda^J_i\}$ является фундаментальным объектом первого порядка подмногообразия M_m ,который удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$d\Lambda^J_i-\Lambda^J_j\theta^j_i+\Lambda^K_i\omega^J_K=\Lambda^J_{ij}\theta^j. \qquad (3)$$

В каждой точке $x \in M_m$ касательное пространство $T_x(M_m)$ определяется векторами

$$\Lambda_i=\Lambda^J_i e_J, \qquad (4)$$

а группа $\mathcal{D}^1_m$ с инвариантными формами $\overline{\theta}^j_i=\theta^j_i\big|_{\theta^i=0}$ в каждом касательном пространстве представлена как группа преобразований векторного репера Λ_i :

$$\delta\Lambda_i=\overline{\theta}^j_i\Lambda_j. \qquad (5)$$

Пусть подмногообразие M_m нормально оснащено полем объекта $\{N^J_\alpha\}$ $(\alpha,\beta=\overline{m+1,n})$:

$$dN^J_\alpha-N^J_\beta\theta^\beta_\alpha+N^K_\alpha\omega^J_K=N^J_{\alpha i}\theta^i. \qquad (6)$$

В каждой точке $x \in M_m$ нормально оснащающее подпространство