УДК 514.764.3

Т. Г. Аленина

*Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

Поля соприкасающихся гиперквадрик Q^2_{n-1} на регулярном гиперполосном распределении в пространстве аффинно-метрической связности

Изучаются поля соприкасающихся гиперквадрик Q^2_{n-1} на регулярном гиперполосном распределении Н в $\mathrm{M}_{n,n}$.

***Ключевые слова*:** гиперквадрика, гиперполосное распределение, пространство аффинно-метрической связности.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I}, \bar{J} = \overline{0,n};\ K, L = \overline{1,n};$$
$$i, j, k, s = \overline{1,m};\quad \alpha = \overline{m+1,n};\quad u, v, w = \overline{m+1,n-1}.$$

Определение 1 [1—3]. *Гиперквадрика поля Q^2_{n-1} на распределении Н в пространстве аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$, касающаяся текущей плоскости Π_{n-1} оснащающего распределения в его центре A_0, называется соприкасающейся, если с любой кривой*

$$l: \begin{cases} \omega^i_0 = \mu^i \theta,\ D\theta = \theta \wedge \theta^0_0, \\ \omega^\alpha_0 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

принадлежащей базисному распределению, она имеет касание второго порядка, то есть

$$A_0,\ A_0 + dA_0,\ \ A_0 + dA_0 + \frac{1}{2!} d^2 A_0 \in Q_{n-1}^2 \left(\operatorname{mod} l\right)$$

(здесь понимается касание с разверткой данной кривой на исходный слой).

Определение 2 [3]. *Говорят, что гиперквадрика поля* Q_{n-1}^2 *имеет соприкосновение третьего порядка с кривой* l (*см. выражение* (1)), *принадлежащей распределению* H *в пространстве* $\mathrm{M}_{n,n}$, *если*

$$A_0,\ A_0 + dA_0,\ A_0 + dA_0 + \frac{1}{2!} d^2 A_0,\ A_0 + dA_0 + \frac{1}{2!} d^2 A_0 + \\ + \frac{1}{3!} d^3 A_0 \in Q_{n-1}^2 \left(\operatorname{mod} l\right);$$

в случае, когда такое соприкосновение имеет место для любой кривой (1), то говорят, что у гиперквадрики Q_{n-1}^2 *есть соприкосновение третьего порядка с многообразием* H *в* $\mathrm{M}_{n,n}$.

Если в репере первого порядка уравнение гиперквадрики Q_{n-1}^2 имеет вид

$$q_{\bar{I}\bar{J}} x^{\bar{I}} x^{\bar{J}} = 0,\ q_{\bar{I}\bar{J}} = q_{\bar{J}\bar{I}}, \tag{2}$$

то требование касания Q_{n-1}^2 с текущим элементом оснащающего распределения приводит к равенствам

$$q_{00} = q_{i0} = q_{v0} = 0, \tag{3}$$

а требование ее касания второго порядка с любой кривой, принадлежащей базисному распределению, приведет к

$$q_{n0} a_{ij}^n + q_{ij} = 0. \tag{4}$$

Предполагая $q_{n0} \neq 0,$ за счет нормировки коэффициентов уравнения (2) можно добиться, чтобы

$$q_{n0} = -1,\ q_{ij} = a_{ij}^n. \tag{5}$$

В силу выражений (4), (5) уравнение соприкасающейся гиперквадрики Q^2_{n-1} запишется в виде

$$a^n_{ij}x^i x^j + 2q_{in}x^i x^n + 2q_{iv}x^i x^v + q_{uv}x^u x^v +$$
$$+ 2q_{un}x^u x^n + q_{nn}(x^n)^2 = 2x^0 x^n. \tag{6}$$

Согласно некоторым работам [1; 2] критерием инвариантности гиперквадрик поля (2) (относительно преобразований стационарной подгруппы текущего элемента распределения Н) является выполнение дифференциальных уравнений

$$\delta q_{\bar I \bar J} - q_{\overline{KJ}}\pi^{\bar K}_{\bar I} - q_{\overline{IK}}\pi^{\bar K}_{\bar J} = \Theta q_{\bar I \bar J},\ D\Theta = \Theta \wedge \Theta^0_0. \tag{7}$$

Условия (7) для нулевых коэффициентов (3) удовлетворяются тождественно. Для остальных коэффициентов уравнения гиперквадрик поля (2) после исключения формы $\Theta = -\pi^n_n$ условия (7) запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{aligned}
&\delta q_{ij} - q_{kj}\pi^k_i - q_{ik}\pi^k_j + q_{ij}\pi^n_n = 0,\\
&\delta q_{iv} - q_{kv}\pi^k_i - q_{iu}\pi^u_v + q_{iv}\pi^n_n = 0,\\
&\delta q_{in} - q_{kn}\pi^k_i - q_{ik}\pi^k_n - q_{iv}\pi^v_n = 0,\\
&\delta q_{uv} - q_{wv}\pi^w_u - q_{uw}\pi^w_v + q_{uv}\pi^n_n = 0,\\
&\delta q_{un} - q_{vn}\pi^v_u - q_{uv}\pi^v_n - q_{uk}\pi^k_n = 0,\\
&\delta q_{nn} - q_{nn}\pi^n_n - 2\left(q_{in}\pi^i_n + q_{vn}\pi^v_n\right) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Коэффициенты соприкасающихся гиперквадрик поля (6) можно охватить компонентами последовательности полей фундаментальных геометрических объектов распределения Н не единственным образом.

Будем искать такие соприкасающиеся гиперквадрики, относительно которых плоскости Π_m и Π_{n-m-1} в каждом центре A_0 распределения Н были бы полярно сопряжены, в силу чего в уравнении (6) должно быть $q_{iv} = 0$. Заметим, что уравнения (8_2) для этих нулевых коэффициентов тождественно удовлетворяются.

Определение 3. *Гиперполосное распределение* m*-мерных линейных элементов* H *называется взаимным, если* $\Lambda^n_{iv}=0$.

В дальнейшем будем рассматривать взаимное распределение H. В качестве q_{uv} можно взять $q_{uv}=a^n_{uv}$. Функции

$$p_i \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{L_i}{n+1}-\frac{g_{i0}}{c}+\Lambda^n_{in}\right),$$

$$F_u \overset{def}{=} = \frac{1}{2}\left(\frac{L_u}{n+1}+A^n_{un}-\frac{g_{u0}}{c}\right), \tag{9}$$

$$S_n \overset{def}{=} \frac{L_n}{n+1}-\frac{g_{n0}}{c}$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\delta p_i - p_j\pi^j_i - a^n_{ij}\pi^j_n = 0, \;\; \delta F_u - F_v\pi^v_u - a^n_{uv}\pi^v_n = 0, \tag{10}$$

$$N^i_{jK} = N^i_{nK} = \nu^i_{jK} = \nu^i_{uK} = \nu^i_j = \nu^i_u = A^n_{jK} = A^n_{nK} = 0,$$

а следовательно, их можно взять в качестве коэффициентов q_{in}, q_{un}, q_{nn} уравнения соприкасающихся гиперквадрик поля (6) соответственно.

Таким образом, имеем *поле инвариантных внутренним образом определенных соприкасающихся гиперквадрик* Q^2_{n-1} *распределения* H*, уравнения которых в репере первого порядка записываются в виде*

$$a^n_{ij}x^ix^j + 2p_ix^ix^n + a^n_{uv}x^ux^v + 2F_vx^vx^n + S_n\left(x^n\right)^2 = 2x^0x^n. \tag{11}$$

Согласно уравнениям (10_1) в случае $\Lambda^n_{[ij]}=0$ система функций

$$D^n_{ijk} \overset{def}{=} \frac{1}{3}\Lambda^n_{(ijk)} - p_{(i}\Lambda^n_{jk)} \tag{12}$$

образует тензор второго порядка.

Покажем, что при $\Lambda^n_{[ij]} = 0$ обращение в нуль тензора D^n_{ijk} есть условие касания третьего порядка соприкасающихся гиперквадрик поля (11) с подмногообразием H в пространстве $\mathrm{M}_{n,n}$.

В случае распределения H с полем симметрического тензора Λ^n_{ij} координаты точки $A_0 + dA_0 + \frac{1}{2!}d^2 A_0 + \frac{1}{3!}d^3 A_0$ при смещении вдоль кривой (1), принадлежащей подмногообразию H в пространстве $\mathrm{M}_{n,n}$, *с точностью до третьего порядка малости удовлетворяют уравнению соприкасающейся гиперквадрики (11) тогда и только тогда, когда выполнены соотношения*

$$\left[\frac{1}{3}\Lambda^n_{ijk} - p_i \Lambda^n_{jk}\right]\mu^i \mu^j \mu^k = 0. \tag{13}$$

Если такое соприкосновение имеет место для любой кривой (1) (то есть μ^i — произвольные, одновременно не равны нулю), то из соотношений (13) следует, что *при* $\Lambda^n_{[ij]} = 0$ *обращение в нуль тензора второго порядка* D^n_{ijk} *(см. (12)) есть условие соприкосновения третьего порядка гиперквадрики поля (11) с взаимным распределением* H.

Теорема 1. *Во второй дифференциальной окрестности текущего элемента взаимного регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов* H*, вложенного в пространство аффинно-метрической связности* $\mathrm{M}_{n,n}$*, внутренним образом определяется поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик* Q^2_{n-1} *подмногообразия* H*, уравнения которых записываются в виде выражения (11), где функции* a^n_{ij}, p_i, a^n_{uv}, F_v, S_n *имеют строение (9); в случае распределения* H *с полем симметричного тензора* Λ^n_{ij} *необходимым и достаточным условием соприкосновения третьего порядка* *гиперквадрики поля (11) с подмногообразием* Н *является обращение в нуль тензора второго порядка* D^n_{ijk} *(см. (12)).*

В третьей дифференциальной окрестности найдем поле соприкасающихся гиперквадрик подмногообразия Н в $\mathrm{M}_{n,n}$, являющегося необязательно взаимным.

Возьмем охват

$$a_i \overset{def}{=} a^n_{ijk} a^{jk}_n \; ; \tag{14}$$

справедливо

$$\nabla_\delta a_i - (m+2) a^n_{is} \pi^s_n = 0. \tag{15}$$

Охват

$$\mathrm{X}_i \overset{def}{=} a_i - \frac{g_{i0}}{c} \tag{16}$$

удовлетворяет уравнениям

$$\nabla \mathrm{X}_i - (m+2) a^n_{is} \omega^s_n = \mathrm{X}_{iL} \omega^L_0 \; ; \tag{17}$$

следовательно, функции $\dfrac{\mathrm{X}_i}{m+2}$ удовлетворяют уравнениям (8_3).

В качестве q_{uv} можно взять $q_{uv} = a^n_{uv}$.

Продолжая уравнения (17), имеем

$$\nabla_\delta \mathrm{X}_{ij} - \Lambda^n_{ij} \mathrm{X}_s \pi^s_n - (m+2) a^n_{isj} \pi^s_n + (m+2) a^n_{is} N^s_{vj} \pi^v_n = 0. \tag{18}$$

Охват

$$b_v \overset{def}{=} -\left(a^n_{uv} a^u_n + a^0_v \right) \tag{19}$$

удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\nabla_\delta b_v - a^n_{wv} \pi^w_n = 0. \tag{20}$$

Следовательно, уравнениям (8_5) удовлетворяет охват (19), то есть в качестве q_{vn} можно взять $q_{vn} = b_v$.

В третьей дифференциальной окрестности возьмем функцию

$$\Phi_n \overset{def}{=} \frac{1}{m(m+2)} a_n^{ij}\left(\mathrm{X}_{ij} - \frac{\mathrm{X}_i \mathrm{X}_j}{m+2} - \mathrm{X}_i \frac{g_{j0}}{c} \right) - a_n^v b_v; \qquad (21)$$

в силу выражений (17), (18) и (20) эта функция удовлетворяет уравнению

$$\delta\Phi_n - \Phi_n \pi_n^n - 2\left(\frac{\mathrm{X}_s}{m+2}\pi_n^s + b_v \pi_n^v\right) = 0. \qquad (22)$$

Следовательно, в уравнении (8_6) в качестве q_{nn} можно взять $q_{nn} = \Phi_n$.

Таким образом, в третьей дифференциальной окрестности текущего элемента распределения Н в пространстве $\mathrm{M}_{n,n}$ внутренним инвариантным образом определяется поле соприкасающихся гиперквадрик $\widetilde{Q}_{n-1}^2$, уравнения которых записываются в виде

$$a_{ij}^n x^i x^j + 2\frac{\mathrm{X}_i}{m+2} x^i x^n + a_{uv}^n x^u x^v + 2b_v x^v x^n + \Phi_n \left(x^n\right)^2 = 2x^0 x^n. \qquad (23)$$

В уравнении (23) все коэффициенты, за исключением a_{uv}^n, получены с использованием полей фундаментальных подобъектов $\{\Lambda_{ij}^n\}$, $\{\Lambda_{ij}^n, \Lambda_{ij_1j_2}^n\}$, $\{\Lambda_{ij}^n, \Lambda_{ij_1j_2}^n, \Lambda_{ij_1j_2j_3}^n\}$ третьего порядка с привлечением полей объектов $\{\Lambda_{ij}^v, \Lambda_{ij}^n\}$, $\{N_{vj}^i\}$, $\{g_{i0}\}$; следовательно, поле соприкасающихся гиперквадрик имеет место и на регулярной гиперполосе H_m в пространстве $\mathrm{M}_{n,n}$, если вместо тензора a_{uv}^n взять тензор B_{uv}^n, полученный в работах [3; 4].

Нетрудно проверить, что при $\Lambda_{[ij]}^n = 0$ обращение в нуль тензора второго порядка

$$\widetilde{D}_{ijk}^n = \frac{m+2}{3}\Lambda_{(ijk)}^n + \frac{1}{c} g_{0(i}\Lambda_{jk)}^n - a_{(i}\Lambda_{jk)}^n \qquad (24)$$

есть условие соприкосновения третьего порядка гиперквадрик поля (23) с гиперполосным распределением Н в пространстве $\mathrm{M}_{n,n}$.

Теорема 2. *Регулярное гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов* H *в пространстве* $\mathrm{M}_{n,n}$ *в третьей дифференциальной окрестности внутренним образом порождает поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик* $\widetilde{Q}^2_{n-1}$, *уравнения которых имеют вид (23), где функции* $a^n_{ij}, X_i, a^n_{uv}, b_v, \Phi_n$ *имеют соответственно строения (16), (19), (21); в случае распределения* H *с полем симметричного тензора* Λ^n_{ij} *необходимым и достаточным условием соприкосновения третьего порядка гиперквадрики поля (23) с подмногообразием* H *является обращение в нуль тензора второго порядка* $\widetilde{D}^n_{ijk}$ *(см. (24)).*

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

2. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения *m*-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. Геом. семинара. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.

3. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

4. *Столяров А. В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения *m*-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии. Итоги науки и техн. / ВИНИТИ АН СССР. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

T. Alenina

Fields of osculating hyperquadrics Q^2_{n-1} on regular hyperband distribution in the space of affine-metric connection

This work is devoted to fields of osculating hyperquadric Q^2_{n-1} on regular hyperband distribution in the $\mathrm{M}_{n,n}$.