frames and invariants of curves and hypersurface are given. We also define all curves and surfaces such that the canonical frames not exist.

УДК 514.76

А.И. Долгарев
(*Пензенский государственный университет*)

ПОВЕРХНОСТИ, АНАЛОГИЧНЫЕ ПЛОСКОСТЯМ, В НИЛЬПОТЕНТНОМ ОДУЛЯРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматриваются аналоги плоскостей в одулярном нильпотентном пространстве. В общем случае кривизна этих поверхностей отлична от нуля.

Одуль на произвольной алгебраической структуре определяется в результате задания внешней операции [1]. Одули на группах Ли обобщают линейные пространства. Все 3-мерные разрешимые одули на группах Ли приведены в работе [2], среди них содержится единственный нильпотентный одуль – сибсон. Заменяя линейное пространство одулем в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства, получаем вейлевские одулярные пространства, кратко ВО-пространства [3]. На ВО-пространствах определено касательное отображение в одуль, тем самым ВО-пространства включают римановы пространства как частный случай. ВО-пространство, одулем которого является нормированный сибсон, называется ЕС-пространством. Геометрии ЕС-пространства посвящены работы [4 – 6]. Не всякие три неколлинеарные точки ЕС-пространства определяют плоскость. Ниже определены квазиплоскости – аналоги плоскости; а также рассматриваются их свойства. Нормальная кривизна квазиплоскости отлична от нуля.

§ 1. ЕС-пространство

1. Сибсон. На многообразии R^3 троек действительных чисел *сибсон* Σ задается операциями:

$$(x,y,z)+(u,v,w)=(x+u,y+v,z+w+uy),$$

$$t(x,y,z)=(xt,yt,zt+xy\frac{t(t-1)}{2}),t\in\mathrm{R}.$$

Элементы сибсона называются *сибсами*. Нулевой сибс: $\vartheta=(0,0,0)$; $-(x,y,z)=(-x,-y,-z+xy)$. Обозначим $(1,0,0)=\alpha$, $(0,1,0)=\beta$, $(0,0,1)=\gamma$. Разложение $\sigma=x\alpha+y\beta+z\gamma$ сибса $\sigma=(x,y,z)$ однозначно, **Б** = (α,β,γ) – *базис* сибсона Σ.

Пусть $\delta=(u,v,w)$. Коммутатор $[\delta,\sigma]=-\delta-\sigma+\delta+\sigma$ сибсов σ и δ равен $[\delta,\sigma]=(0,0,uy-xv)$. Имеем $[\beta,\alpha]=\gamma$, значит, сибсон порождается двумя сибсами α и β: $\Sigma=\langle\alpha,\beta\rangle$. Два сибса σ, δ порождают 2-мерный подсибсон $\langle\sigma,\delta\rangle$, если и только если они перестановочны.

Нормой $\|\sigma\|$ сибса $\sigma=(x,x^1,x^2)$ называется $\|\sigma\|=|x|$, если $x\neq 0$; $\|\sigma\|=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}$, если $x=0$. Подсибсон $\langle\alpha,\gamma\rangle$ является галилеевым векторным пространством, подсибсон $\langle\beta,\gamma\rangle$ является евклидовым векторным пространством, подсибсон $\langle\alpha,\beta\rangle$ совпадает с Σ.

Сибсонная функция $\sigma=\sigma(t)=(x(t),x^1(t),x^2(t))$, $t\in\mathrm{I}\subseteq\mathrm{R}$, обобщает векторную функцию. Производная сибсонной функции найдена в работе [7]:

$$\sigma'(t)=(x'(t),x'^1(t),x'^2(t)+x'(t)(\frac{1}{2}x'^1(t)-x^1(t))).$$

2. ЕС-пространство. Точка O и базис Б сибсона составляют *репер* $\mathrm{B}=(O,\alpha,\beta,\gamma)$ ЕС-пространства. Всякой паре точек A,B ЕС-пространства соответствует сибс AB. Координатами точки M в репере **В** называются координаты сибса OM в базисе **Б**. Сибс AB равен $AB=(b-a,\ b^1-a^1,\ b^2-a^2-(b-a)a^1)$, где $A=(a,a^1,a^2)$, $B=(b,b^1,b^2)$. Расстояние $|AB|$ между точками A и B равно норме сибса AB. Точка A и сибс $\sigma\neq\vartheta$ порождают прямую $\langle A,\sigma\rangle$ $=\{M\mid AM=t\sigma,t\in\mathrm{R}\}$. Две различные точки определяют единственную прямую. Пусть $\delta = AC$, $C \notin \langle A, \sigma \rangle$, $-\delta + \sigma + \delta \;=\; \sigma^{\delta} = \tau$. Прямые $\langle C, \sigma \rangle$ и $\langle C, \tau \rangle$ параллельны прямой $\langle A, \sigma \rangle$ [6].

Точка A и перестановочные сибсы σ, ρ порождают плоскость ЕС-пространства $\langle A, \sigma, \rho \rangle = \{ M \mid AM = u\sigma + v\rho,\ (u, v) \in \mathrm{R}^2 \}$. Неколлинеарные точки A, B, C определяют плоскость, если и только если сибсы AB и AC перестановочны. Существуют координатные плоскости $\langle O, \alpha, \gamma \rangle$ (это галилеева плоскость) и $\langle O, \beta, \gamma \rangle$ (евклидова плоскость), не существует плоскости, порожденной точкой O и сибсами α, β . Пусть $\sigma = (c, c^1, c^2)$; параметрические уравнения плоскости $\langle A, \gamma, \sigma \rangle$ таковы: $x = cv + a$, $y = c^1 v + a^1$, $z = cc^1 \dfrac{v(v-1)}{2} + c^2 v + ca^1 v + u + a^2$; уравнения нелинейны.

3. Кривые и поверхности. Регулярная кривая класса C^3 ЕС-пространства определяется сибсонной функцией $\sigma(s) = (s, x(s), y(s))$, $s \in \mathrm{I} \subseteq \mathrm{R}$. Векторная функция $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$ задает проекцию кривой $\sigma(s)$ на евклидову плоскость $\langle O, \beta, \gamma \rangle$. Кривизна и кручение кривой $\sigma(s)$ (см. [6]) соответственно равны

$$k_1 = \sqrt{\ddot{x}^2 + (\ddot{y} + \frac{1}{2}\ddot{x} - \dot{x})^2}\ ,\ k_2 = \frac{\ddot{x}(\dddot{y} - \ddot{x}) - \dddot{x}(\ddot{y} - \dot{x})}{k_1^{\,2}}\ .$$

Регулярная поверхность класса C^3 ЕС-пространства задается сибсонной функцией: $\sigma(u, v) = (v, x(u, v), y(u, v))$, $(u, v) \in \mathrm{D} \subseteq \mathrm{R}^2$. Ее проекцией на евклидову плоскость является векторное поле $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Поверхность не имеет касательной плоскости ни в какой своей точке [6]. Нормальная кривизна поверхности $\sigma(u, v)$ равна $k = Aq^2 + 2Bq + C$, где $q = \dfrac{du}{dv}$, $A = \vec{r}_{uu}\vec{n}$, $B = \vec{r}_{uv}\vec{n}$, $C = (\vec{r}_{vv} + (\frac{1}{2}x_{vv} - x_v)\gamma)\vec{n}$ и $\vec{n} = (-\dfrac{y_u}{\|\vec{r}_u\|}, \dfrac{x_u}{\|\vec{r}_u\|})$ есть единичный сибс нормали поверхности [6].

§ 2. Квазиплоскости

1. Определение квазиплоскостей. Рассмотрим единичные сибсы: $\eta=(0,\cos\varphi,\sin\varphi)$, $\xi=(1,c^1,c^2)$. Они не перестановочны, поэтому не определяют плоскость. Зададим поверхность, определяемую точкой P и сибсами η, ξ, η^ξ, ξ^η. Пусть всякая точка M поверхности определяется равенством $PM=PT+TM$, где (а) $PT=v\xi$, $TM=u\eta$; (б) $PT=u\eta$, $TM=v\xi$; (в) $PT=v\xi$, $TM=u\eta^\xi$; (г) $PT=u\eta$, $TM=v\xi^\eta$. Эти поверхности называются *квазиплоскостями*.

Свойство. *Квазиплоскости описываются следующими функциями:*

(а), (в) $\sigma(u,v)=(v,a_1v+b_1u+d_1,a_2v+b_2u+gv^2+d_2)$;

(б) $\sigma(u,v)=(v,a_1v+b_1u+d_1,a_2v+b_2u+gv^2+fuv+d_2)$;

(г) $\sigma(u,v)=(v,a_1v+b_1u+d_1,a_2v+b_2u+gv^2)$.

В случае $\eta=\beta=(0,1,0)$ и $\xi=\alpha=(1,0,0)$ имеем следующие квазиплоскости: (а$^\text{o}$),(в$^\text{o}$) $\sigma(u,v)=(v,u,0)$; (б$^\text{o}$) $\sigma(u,v)=(v,u,-uv)$; (г$^\text{o}$) $\sigma(u,v)=(v,u,-v)$.

2. **Свойства квазиплоскостей.** Выполняются

2.1. Теорема. *Нормальная кривизна квазиплоскостей отлична от нуля; в формуле кривизны* $A=C=0$, $B\neq 0$, $k=2Bq$. *В случаях (а), (в), (г)* $B=\cos^2\varphi$; *в случае (б)* $B=\dfrac{1}{\|\vec r_u\|}\cos^2\varphi$, $\vec r_u=(\cos\varphi,\sin\varphi-v\cos\varphi)$.

При $c^1=0$ *и* $\varphi=\pi/2$ *квазиплоскости (а), (в), (г) являются галилеевыми плоскостями и имеют нулевую кривизну.*

2.2. Свойство. *Квазиплоскости (а^o), (в^o), (г^o) имеют постоянную нулевую кривизну. Квазиплоскость (б^o) имеет кривизну* $k=\dfrac{2q}{\sqrt{1+v^2}}$.

2.3. Теорема. *Квазиплоскости являются цилиндрическими поверхностями, их образующие есть прямые евклидовых плоскостей ЕС-пространства, направляющие есть v-линии, представляющие собой галилеевы циклы – прямые ЕС-пространства. В сечениях поверхностями* $y=0$ *лежат линии ненулевой кривизны и ненулевого кручения.*

Линия $\sigma(v) = (v, a_1 v - \frac{b_1}{b_2}(a_2 v + g v^2 + d_2) + d_1, 0)$ есть указанное сечение квазиплоскости (а). Ее кривизна и кручение соответственно равны

$$k_1 = \frac{b_1}{b_2}\sqrt{4g^2 + (a_2 + 2gv - 2g)^2}\ ,\ k_2 = -\frac{4g^2}{4g^2 + (a_2 + 2gv - 2g)^2}\,.$$

Кривизна направляющей равна $k_1 = 2g - a_1$. Сечения $y = a$ квазиплоскости (б°) таковы: $\sigma(v) = (v, -\frac{a}{v}, a)$; $k_1 = \frac{a}{v^2}\sqrt{\frac{8}{a^2} - \frac{4}{v} + 1}$; $k_2 = \frac{12}{8v - 4v^2 + v^3}$.

Список литературы

1. Сабинин Л.В. Одули как новый подход к геометрии со связностью // ДАН СССР. 1977. № 5. С. 800 – 803.

2. *Долгарев А.И.* Кривые 3-мерных вейлевских одулярных пространств и кривые евклидовой плоскости // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. Вып. 33. С. 25 – 28.

3. Он же. ЕМ-пространства. Дис... канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 1991. 95 с.

4. *Он же.* Кривые одулярного пространства на нильпотентной группе Ли // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2000. Т. 5. С. 75 –76.

5. *Он же.* Поверхности одулярного пространства на нильпотентной группе Ли // Междунар. шк.-семин. по геом. и анализу, посв. 90-летию Н.В. Ефимова: Тезисы докл. Ростов н/Д., 2000. С. 32 – 33.

6. *Он же.* Дифференциальная геометрия пространства с касательным отображением в одуль галилеевых движений. Саранск, 2002. 50 с. (Препринт №51).

7. *Он же.* Дифференцирование одулярных функций // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. Київ, 1995. Вип. 10. С. 57 – 79.

A. Dolgarew

SURFACES SIMILAR TO PLANES
IN NILPOTENT ODULAR SPACE

The clones of planes in odular nilpotent space are considered. Generally curvature of these surfaces is distinct from zero.

УДК 514.75

Н.А. Елисеева
(Калининградский государственный университет)

ПУЧКИ ПЛОСКОСТЕЙ НОРДЕНА-ТИМОФЕЕВА Н(П)-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрены построения плоскостей Нордена-Тимофеева, ассоциированные с внутренней нормалью 1-го рода Н(П)-распределения [5; 4]. Для оснащающего Н-распределения получены две внутренних нормализации в смысле Нордена-Тимофеева.

Схема использования индексов такова:
$\bar I, \bar K, \bar L = \overline{0,n}$; $I, K, L = \overline{1,n}$; $p, q, s = \overline{1,r}$; $i, j, k = \overline{r+1,m}$; $a, b, c = \overline{1,m}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1,n-1}$; $u, v = \overline{r+1,n-1}$; $\sigma, \rho, \tau = \overline{1,n-1}$.

1. **Определение** [1]. Пару распределений

$$\begin{aligned} \Delta\Lambda^{\hat u}_p &\overset{def}{=} \nabla\Lambda^{\hat u}_p - \Lambda^{\hat u}_q\Lambda^{\hat v}_p\omega^q_{\hat v} + \omega^{\hat u}_p = \Lambda^{\hat u}_{pK}\omega^K_0\,, \\ \Delta\mathrm{M}^{\hat\alpha}_a &\overset{def}{=} \nabla\mathrm{M}^{\hat\alpha}_a - \mathrm{M}^{\hat\alpha}_b\mathrm{M}^{\hat\beta}_a\omega^b_{\hat\beta} + \omega^{\hat\alpha}_a = \mathrm{M}^{\hat\alpha}_{aK}\omega^K_0 \end{aligned} \qquad (1)$$

соответственно r-мерных плоскостей Λ (Λ-распределение) и m-мерных плоскостей M (M-распределение) проективного пространства P_n с отношением инцидентности $\mathrm{A}_0 \in \Lambda \subset \mathrm{M}$ $\left(r < m < n-1\right)$ их соответствующих элементов в каждом центре A_0 назовем m-полосным распределением П (П-распределением), при этом Λ-распределение назовем базисным, а M-распределение – оснащающим. С регулярным П-распределением в первой дифференциальной окрестности инвариантно ассоциируется поле гиперплоскостей $H_{n-1}\left(A_0\right)$ (Н-распределение) [2] та-