2. *Столяров А.В.* О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы // Изв. вузов. Мат. 1975. №10. С. 97—99.

3. *Остиану Н.М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RPR). 1962. Т. 7, №2. С. 231—240.

4. *Cartan É.* Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. P., 1937.

A. Kuleshov

About one projective invariant of a family of hyperplane elements with envelope surface of centers

In multidimensional projective space a family of hyperplane elements with envelope surface of centers is considered. The problem of construction of differential invariants of such a family is set. This problem is solved in a general case characterized by non-degenerating a certain tensor. The solution is based on the method of moving frames and calculation of exterior differential forms of E. Cartan.

УДК 574.76

В.С. Малаховский

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Об одном классе конгруэнций коник в трехмерном проективном пространстве

Исследуется двупараметрическое семейство (конгруэнция) V_2 коник C в P_3, имеющих две фокальные точки A_1 и A_2, касательные к конике, в которых пересекаются в характеристической точке A_0 плоскости коники и являются асимптотическими касательными поверхности (A_0), а касательные к линиям на (A_i), соответствующим фокальным линиям на поверхности

(A_j) $(i,j,k=1,2,\ i\neq j)$, пересекаются в характеристической точке A_3 плоскости $(A_1A_2A_3)$ и являются асимптотическими касательными к поверхности (A_3).

Ключевые слова: фокальная точка коники, характеристическая точка, асимптотические линии, торсы.

1. Теорема существования

Теорема 1.1. *Конгруэнция коник* C [1, с. 26—28]

$$F \equiv 2x^1x^2-(x^0)^2=0,\ \ x^3=0 \qquad (1.1)$$

существует и определяется с произволом трех функций двух аргументов.

Доказательство. Имеем

$$\begin{gathered}\omega_0^3=0,\ \ \omega_3^0=0,\ \ \omega_1^2=0,\ \ \omega_2^1=0,\\ \omega_1^3=a\omega^2,\ \ \omega_2^3=a\omega^1,\ \ \omega_1^0=b\omega_3^2,\ \ \omega_2^0=b\omega_3^1,\\ da+a\Omega=0,\ \ db+b\Omega=0,\\ \omega_3^1=m_1^1\omega^1+m_2^1\omega^2,\ \ \omega_3^2=m_1^2\omega^1+m_2^2\omega^2;\\ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_0^0=n_1\omega^1+n_2\omega^2,\end{gathered} \qquad (1.2)$$

где

$$\Omega=\omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3, \qquad (1.3)$$

$$ab\neq 0. \qquad (1.4)$$

Замыкая уравнения

$$\omega_0^3=0,\ \ \omega_3^0=0, \omega_1^2=0,\ \ \omega_2^1=0, da+a\Omega=0, db+b\Omega=0, \qquad (1.5)$$

находим

$$(b-a)\omega_3^2\wedge\omega^2=0,\ (b-a)\omega_3^1\wedge\omega^1=0. \qquad (1.6)$$

Следовательно,

$$b=a\cdot \qquad (1.7)$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции V_2 коник C принимает вид

$$\begin{gathered}\omega_0^3 = 0,\ \ \omega_3^0 = 0,\ \ \omega_1^2 = 0,\ \ \omega_2^1 = 0,\\ \omega_1^3 = a\omega^2,\ \ \omega_2^3 = a\omega^1,\ \ \omega_1^0 = a\omega_3^2, \omega_2^0 = a\omega_3^1,\\ \omega_3^1 = m_1^1\omega^1 + m_2^1\omega^2, \omega_3^2 = m_1^2\omega^1 + m_2^2\omega^2,\\ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0 = n_1\omega^1 + n_2\omega^2.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Ее замыкание имеет вид

$$\begin{gathered}\Delta m_1^1 \wedge \omega^1 + \Delta m_2^1 \wedge \omega^2 = 0,\ \ \Delta m_1^2 \wedge \omega^1 + \Delta m_2^2 \wedge \omega^2 = 0,\\ \Delta n_1 \wedge \omega^1 + \Delta n_2 \wedge \omega^2 = 0,\end{gathered} \tag{1.9}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta m_1^1 = dm_1^1 + m_1^1(\omega_0^0 - \omega_3^3),\\ \Delta m_2^1 = dm_2^1 + m_2^1(\omega_0^0 - \omega_2^2 + \omega_1^1 - \omega_3^3),\\ \Delta m_1^2 = dm_1^2 + m_1^2(\omega_0^0 - \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3),\\ \Delta m_2^2 = dm_2^2 + m_2^2(\omega_0^0 - \omega_3^3),\\ \Delta n_1 = dn_1 + n_1(\omega_0^0 - \omega_1^1),\ \ \Delta n_2 = dn_2 + n_2(\omega_0^0 - \omega_2^2).\end{gathered} \tag{1.10}$$

Имеем

$$S_1 = 3,\ q = 6,\ S_2 = 3,\ Q = 9,\ N = 3\cdot 3 = 9 = Q.$$

Система в инволюции и определяет решение с произволом трех функций двух аргументов.

2. Фокальные точки коники $C \in V_2$

Имеем [2, с. 141]

$$\begin{gathered}-dx^3 = (x^1\omega^2 + x^2\omega^1)a + x^3\omega_3^3,\\ -\frac{1}{2}dF = x^1(x^0\omega^2 + x^3\omega_3^2) + x^2(x^0\omega^1 + x^3\omega_3^1) -\\ -x^0(x^0\omega_0^0 + x^1\omega_1^0 + x^2\omega_2^0).\end{gathered} \tag{2.1}$$

Учитывая пфаффовы уравнения (1.2), получим

$$x^3 = 0,\ \ x^2\omega^1 + x^1\omega^2 = 0, \tag{2.2}$$

$$-\frac{1}{2}dF = x^1x^2(n_1\omega^1 + n_2\omega^2) + x^0x^1(\omega^2 - \omega_1^0) + x^0x^2(\omega^1 - \omega_2^0).$$

Следовательно, фокальные точки коники $C \in V_2$ определяются системой алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} &2x^1x^2 - (x^0)^2 = 0,\ \ x^3 = 0, \\ &x^1(x^1x^2n_1 - x^0x^1m_1^2 - (m_1^1 - 1)x^0x^2) - x^2(x^1x^2n_2 - \\ &-(m_2^2 - 1)x^0x^1 - x^0x^2m_2^1), \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

то есть системой

$$\left.\begin{aligned} &2x^1x^2 - (x^0)^2 = 0,\ \ x^3 = 0, \\ &2x^1x^2\left(m_1^2(x^1)^2 + (m_1^1 - m_2^2)x^1x^2 - m_2^1(x^2)^2\right)^2 = \\ &= (x^1x^2)^2(n_1x^1 - n_2x^2)^2, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

так как

$$x_0 = \frac{x^1x^2(n_1x^1 - n_2x^2)^2}{m_1^2(x^1)^2 + (m_1^1 - m_2^2)x^1x^2 - m_2^1(x^2)^2}. \tag{2.5}$$

Точки $A_1(1,0,0,0)$ и $A_2(0,1,0,0)$ — фокальные точки коники C.

Если

$$m_1^2 = 0,\ \ m_2^1 = 0,\ \ m_1^1 - m_2^2 \neq 0, \tag{2.6}$$

то точки A_1 и A_2 являются сдвоенными фокальным точками коники C, поскольку после сокращения в последнем уравнении системы (2.4) на коники x^1x^2, получим

$$\left.\begin{aligned} &2x^1x^2 - (x^0)^2 = 0,\ \ x^3 = 0, \\ &2(m_1^1 - m_2^2)(x^1x^2)^2 = x^1x^2(n_1x^1 - n_2x^2)^2. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Наконец, если кроме условий (2.6) выполняются соотношения

$$n_1 = 0, \; n_2 = 0\,, \qquad (2.8)$$

то A_1 и A_2 являются строенными фокальным точками.

Конгруэнция V_2 со сдвоенными фокальными поверхностями (A_1) и (A_2) определяются с произволом одной функции двух аргументов, а конгруэнция V_2 со строенными фокальными поверхностями (A_1) и (A_2) — с произволом двух функций одного аргумента.

3. Ассоциированные прямолинейные конгруэнции

Теорема 3.1. *Торсы прямолинейных конгруэнций* (A_1A_2) *и* (A_0A_3)*, ассоциированных с конгруэнций* V_2 *соответствуют.*

Доказательство. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3) определяются одним уравнением:

$$m_1^2(x^1)^2 + (m_1^1 - m_2^2)x^1x^2 - m_2^1(x^2)^2 = 0\,. \qquad (3.1)$$

Анализируя уравнение (3.1), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Торсы прямолинейных конгруэнций* (A_1A_2) *и* (A_0A_3) *соответствуют асимптотическим линиям поверхностей* (A_0) *и* (A_3) *тогда и только тогда, когда поверхности* (A_1) *и* (A_2) *являются сдвоенными фокальными поверхностями конгруэнции* V_2.

Список литературы

1. *Малаховский В. С.* Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве : учеб. пособие. Калининград, 1986.

2. *Малаховский В. С.* Дифференциальная геометрия многообразий квадрик // Итоги науки и техники / ВИНИТИ РАН. М., 2002. С. 138—169.

V. Malakhovsky

About one class of congruences of conics in three dimensional projective space

In three dimensional space P_3 two-parametric family (congruence) of conics with two focal points A_1 and A_2 are investigated. Tangent lines to conic in these points are asymptotic tangent to the surface (A_0) and intersect at characteristic point A_0 of the plane of the conic. The tangents to lines on (A_i) corresponding to focal lines on the surface (A_j) $(i, j, k = 1,2, \ i \neq j)$ are asymptotic tangent to the plane (A_3) and intersect in characteristic point A_3 of the plane $(A_1 A_2 A_3)$.

УДК 574.76

В. С. Малаховский, Е. П. Юрова

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Конгруэнция квадрик в трехмерном проективном пространстве, ассоциированная с парой поверхностей

Исследуется двупараметрическое семейство (конгруэнция) K_2 квадрик Q в трехмерном проективном пространстве P_3, обладающее следующими свойствами: на каждой квадрике $Q \in K_2$ имеются две различные фокальные точки A_1 и A_2, фокальные касательные в которых пересекаются в одной точке A_0 и являются асимптотическими касательными поверхности (A_0), а касательные к линиям на поверхности (A_i), соответствующим фокальным линиям на поверхности (A_j) ($i, j, k = 1, 2$; $i \neq j$), также пересекаются в точке A_3 и являются асимптотическими касательными поверхности (A_3), причем асимптотические линии, огибаемые касательными A_0A_i и A_3A_j, соответствуют, A_0 и A_3 полярно сопряжены.