N. Sultanova

ON THE DIMENSION OF MOTION COMPLETE GROUPS
OF THE COTANGENT WITH BUNDLE A HORIZONTAL LIFT CONNECTION

It is proved that the dimension of groupe of motion cotangens bundles with connections ∇^H over (M_n, ∇) is not more than $4n(n-1)+6$ on condition that torsion tensor field $T \neq 0$.

УДК 514.75

М.А. Чешкова

(Алтайский государственный университет)

О МИНИМАЛЬНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{E^n}$

Рассмотрим в евклидовом пространстве E^4 гиперповерхность M, у которой главные кривизны различные. Тогда определится сеть линий кривизны.

Теорема. Если у минимальной гиперповерхности M в E^4, несущей голономную сеть линий кривизны, две линии кривизны геодезические, то гиперповерхность M есть цилиндр над катеноидом.

1. Основные формулы. Рассмотрим гладкую гиперповерхность M в евклидовом пространстве E^4. Обозначим $F(M) - R$-алгебру дифференцируемых на M функций, T_s^q – F-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q,s), $\chi(M)$ – алгебру Ли векторных полей на M, ∂ – дифференцирование и $\langle , \rangle$ – скалярное произведение в E^4. Формулы Гаусса-Вейнгартена гиперповерхности M имеют вид [1, с. 36]:

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + b(X,Y)n, \quad \partial_X n = -AX, \tag{1}$$

где $A \in T_1^1(M), X, Y \in \chi(M), b \in T_2^0(M), b(X,Y) = \langle AX, Y \rangle$ – вторая фундаментальная форма, A – оператор Вейнгартена, ∇ – связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y) = \langle X, Y \rangle$. Выполняются уравнения Гаусса-Кодацци:

$$R(X,Y)Z = b(Y,Z)AX - b(X,Z)AY, \; dA(X,Y) = 0, \tag{2}$$

где $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ – тензор кривизны связности ∇, $dA(X,Y) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X,Y]$ – внешний дифференциал поля A в связности ∇. Обозначим через $X_i, i = 1,2,3$ – орты главных направлений, k_i – главные кривизны. Тогда $AX_i = k_i X_i$. Рассмотрим $dA(X_i, X_j) = 0, i \neq j$. Имеем

$$dA(X_i, X_j) = \nabla_{X_i} AX_j - \nabla_{X_j} AX_i - A[X_i, X_j] = (X_i k_j) X_j + k_j \nabla_{X_i} X_j - (X_j k_i) X_i - k_i \nabla_{X_j} X_i -$$
$$- k_i (\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i)^i - k_j (\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i)^j - k_s (\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i)^s = 0,$$

(по i, j не суммировать), где Z^j j – тая составляющая поля Z. Приравнивая нулю различные составляющие, получим

$$(\nabla_{X_i} X_j)^i = \frac{X_j k_i}{k_j - k_i} X_i, i \neq j, \tag{3}$$

$$(k_j - k_s)(\nabla_{X_i} X_j)^s - (k_i - k_s)(\nabla_{X_j} X_i)^s = 0, i \neq j; s \neq i, j. \tag{4}$$

Потребуем голономность сети, т.е. чтобы каждое 2-распределение, определяемое двумя главными направлениями, было инволютивное. Тогда $[X_i, X_j]^s = 0, s \neq i, j$ [2, с. 19]. Имеем

$$(\nabla_{X_i} X_j)^s - (\nabla_{X_j} X_i)^s = 0, i \neq j; s \neq i, j. \tag{5}$$

При $k_i \neq k_j$ из (4) и (5) получим $(\nabla_{X_i} X_j)^s = 0, i \neq j; s \neq i, j.$ Так как X_i – орты, то $(\nabla_{X_i} X_j)^j = 0$. Таким образом,

$$\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ji} X_i, \Gamma_{ji} = \frac{X_j k_i}{k_j - k_i}, i \neq j. \tag{6}$$

Дифференцируя равенство $\langle X_i, X_j \rangle = 0$ вдоль X_i и используя (6), получим

$$\nabla_{X_i} X_i = -\sum_{s \neq i} \Gamma_{si} X_s. \tag{7}$$

Рассмотрим уравнение Гаусса (2) $R(X_i, X_j) X_i = k_i k_j X_j$, используя (6); (7). Имеем

$$R(X_i, X_j) X_i = \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_i - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_i - \nabla_{\nabla_{X_i} X_j} X_i + \nabla_{\nabla_{X_j} X_i} X_i =$$
$$= (X_j \Gamma_{mi}) X_m - (X_j \Gamma_{ji}) X_j - \Gamma_{mi} \Gamma_{mj} X_j - \Gamma_{ji} (-\sum_{s \neq j} \Gamma_{sj}) X_s - (X_j \Gamma_{ij}) X_j -$$
$$\Gamma_{ij} \Gamma_{ji} X_i - \Gamma_{ij}^2 X_j - \Gamma_{ji} \Gamma_{mi} X_m - \Gamma_{ji}^2 X_j = k_i k_j X_j \; (i, j, m - \text{разные}).$$

Откуда

$$X_j \Gamma_{si} = \Gamma_{ji} (\Gamma_{sj} - \Gamma_{si}), i, j, s - \text{разные}, \tag{8}$$

$$X_j \Gamma_{ji} + X_i \Gamma_{ij} + (\Gamma_{ij})^2 + (\Gamma_{ji})^2 + \Gamma_{mi} \Gamma_{mj} + k_i k_j = 0, m \neq i, j. \tag{9}$$

Дифференцируя равенство $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ и используя (6), получим

$$X_i k_i + \Gamma_{ij} (k_i - k_j) + \Gamma_{is} (k_i - k_s) = 0, \quad i, j, s - \text{разные}. \tag{10}$$

2. Доказательство теоремы. Потребуем, чтобы линии кривизны с касательными X_1, X_2 были геодезическими. Тогда $\nabla_{X_1} X_1 = 0, \nabla_{X_2} X_2 = 0.$ Используя (7); (9) имеем

$$\Gamma_{21} = 0, \Gamma_{31} = 0, \Gamma_{12} = 0, \Gamma_{32} = 0, \tag{11}$$

$$k_1 k_2 = 0, \tag{12}$$

$$X_1 \Gamma_{13} + (\Gamma_{13})^2 + k_1 k_3 = 0, \quad X_2 \Gamma_{23} + (\Gamma_{23})^2 + k_2 \, k_3 = 0. \tag{13}$$

Соотношения (10) примут вид:

$$X_1k_1+\Gamma_{13}(k_1-k_3)=0, X_2k_2+\Gamma_{23}(k_2-k_3)=0, \quad X_3k_3=0. \tag{14}$$

Так как по условию теоремы $k_i-k_j\neq 0, \quad i\neq j$, то для определенности в силу (12) положим

$$k_1=0, \quad k_2\neq 0. \tag{15}$$

Из (14) следует

$$\Gamma_{13}=0. \tag{16}$$

Таким образом,

$$\nabla_{X_1}X_1=0, \nabla_{X_2}X_1=0, \nabla_{X_3}X_1=0, \tag{17}$$

$$\nabla_{X_1}X_2=0, \nabla_{X_2}X_2=0, \nabla_{X_3}X_2=\Gamma_{23}X_3, \tag{18}$$

$$\nabla_{X_1}X_3=0, \nabla_{X_2}X_3=0, \nabla_{X_3}X_3=-\Gamma_{23}X_2. \tag{19}$$

Так как $\partial_Z X_1=0, Z\in\chi(M),$ то гиперповерхность M-цилиндрическая с образующей X_1. По условию теоремы сеть линий кривизны голономная, следовательно, распределение $\Delta=\{X_2,X_3\}$ инволютивное. Соприкасающееся пространство интегрального многообразия N распределения Δ, определяемое векторами

$$\partial_{X_i}X_j=\nabla_{X_i}X_j+\langle AX_i,X_j\rangle n; \quad i,j=2,3,$$

в силу (18); (19) имеет вид: $E^3=\{X_2,X_3,n\}$. X_1 является нормалью к E^3. А так как $\partial_{X_i}X_1=0, i=2,3,$ то E^3 постоянно вдоль N. Следовательно, $N\subset E^3$. Нормаль n к гиперповерхности M является нормалью к N, принадлежащей E^3. Так как $\partial_{X_i}n=-k_iX_i, i=2,3$, то следует, что k_i – главные кривизны поверхности $N\subset E^3$ и поверхность N – минимальная поверхность.

Докажем, что $N\subset E^3$ – поверхность вращения. Так как $X_3k_3=0$, то поверхность N [3, с. 379] – каналовая, т.е. огибающая семейства сфер, центры которых имеют вид: $C=r+\frac{1}{k_3}n$, где r – радиус-вектор соответствующей точки поверхности. Действительно, $\partial_{X_3}C=0$. Исследуем линию центров. (C):

$$\partial_{X_2}C=\frac{k_3-k_2}{k_3^2}(k_3X_2+\Gamma_{23}n).$$

Рассмотрим касательный вектор $t=k_3X_2+\Gamma_{23}n$. Используя (1); (13); (14), получим $\partial_{X_2}t=\Gamma_{23}t$. Таким образом, линия центров (C) – прямая, следовательно, поверхность $N\subset E^3$ есть поверхность вращения. Известно [3, с. 314], что единственная минимальная поверхность вращения в E^3 – катеноид. Таким образом, гиперповерхность M есть цилиндр над катеноидом.

Список литературы

1. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 2.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.
3. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия. М., 1963.

M. Cheshkova

OF MINIMAL HYPERSURFACE IN EUCLIDEAN SPACE E^4.

In a Euclidean space E^4 is considered a minimal hypersurface.

Theorem. *Let M is a minimal hypersurface in Euclidean space E^4, and lines of curvature form holonomic net. If two lines of curvatur are geodesic, then hypersurface M is cylinder off the catenoid.*

УДК 514.76

Ю.И. Шевченко

(Калининградский государственный университет)

ГОЛОНОМНЫЕ И НЕГОЛОНОМНЫЕ РЕПЕРЫ 2-ГО ПОРЯДКА НА ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

На гладком многообразии рассмотрен подвижной репер 2-го порядка $\{e_i, e_{ij}\}$. Показано, что на голономном гладком многообразии существует лишь голономный репер ($e_{ij}= e_{ji}$), а на неголономном гладком многообразии – только неголономный репер ($e_{ij}\neq e_{ji}$).

1. Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие V_n. Пусть точка $A\in V_n$ в некоторой локальной карте имеет координаты $x^i(i,j,k,m,p,q=\overline{1,n})$. Тогда A является функцией координат: $A=A(x^i)$. Продифференцируем это равенство формально:

$$dA=\partial_i A dx^i \ (\partial_i A=\frac{\partial A}{\partial x^i}). \tag{1}$$

Придадим смысл формуле (1). Наделим векторное пространство T_n, касательное к многообразию V_n в точке A, точечной структурой, превратив его тем самым в аффинное пространство. Естественно предполагать, что точка $A\in T_n$, тогда пространство T_n станет центроаффинным. Выберем в центроаффинном пространстве T_n некоторую точку O, отличную от точки A, и отождествим A с соответствующим радиус-вектором $\overline{OA}$. Отметим, что выбор точки O несущественен, так как ее можно заменить другой точкой O′ с сохранением следующих ниже рассуждений.

В формуле (1) частные производные $\partial_i A$ есть базисные векторы, на которые натянуто касательное пространство $T_n =[\partial_i A]$, рассматриваемое как векторное пространство. Совокупность векторов $\{\partial_i A\}$ называется натуральным подвижным (см., например, [1, с.177]) репером 1-го порядка многообразия V_n в точке A. Учитывая тождества $D(dx^i)=0$, где D – внешний дифференциал, продифференцируем формулу (1) внешним образом:

$$D(dA)= \partial_{ij}A dx^j \wedge dx^i \ (\partial_{ij}A=\frac{\partial^2 A}{\partial x^i \partial x^j}).$$