ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

В.С.М а л а х о в с к и й

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается конгруэнция (Q) невырожденных линейчатых квадрик Q, имеющая, по крайней мере, две различные фокальные поверхности (A_0) и (A_3), причем поверхность (A_0)-невырожденная и прямая A_0A_3 не является прямолинейной образующей квадрики Q. Построены ассоциированные пары конгруэнций квадрик и установлен характеристический признак конгруэнции квадрик Ли поверхности (A_0).

§ I. Система пфаффовых уравнений конгруэнции (Q)

Отнесем конгруэнцию (Q) к реперу $R=\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_i $(i, j, k=1,2)$-точки пересечения прямолинейных образующих квадрики Q, проходящих через точки $A_0 \in Q$, $A_3 \in Q$. При надлежащей нормировке вершин репера R уравнение квадрики Q запишется в виде:

$$\mathcal{F} \equiv x^1x^2 - x^3x^4 = 0. \tag{1.1}$$

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{A}_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0,1,2,3),$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \tag{1.3}$$

Система пфаффовых и конечных уравнений конгруэнции (Q) приводится к виду:

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k, \quad \omega_3^i = b_k^i \omega^k,$$
$$\omega_i^3 - \omega^j = c_{ik}\omega^k, \quad \omega_j^0 - \omega_3^i = m_k^i \omega^k, \quad \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 = h_k \omega^k; \tag{1.4}$$

$$c_{12} - c_{21} = 0, \quad b_1^1 m_2^2 - b_2^2 m_1^1 + b_1^2 m_2^1 - b_2^1 m_1^2 = 0, \tag{1.5}$$

где $\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i$. Здесь и в дальнейшем $i \neq j$, причем по индексам i и j суммирование не производится.

Фокальные точки квадрики Q [1] определяются системой уравнений

$$\mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{F}_1 = 0, \quad \mathcal{F}_2 = 0, \tag{1.6}$$

где

$$\mathcal{F}_i \equiv h_i x^1x^2 - a_{ii}^j (x^i)^2 - a_{ji}^i (x^j)^2 + m_i^j x^i x^3 + m_i^i x^j x^3 + c_{ik} x^i x^k. \tag{1.7}$$

Система уравнений

$$\mathcal{F}_1 = 0, \quad \mathcal{F}_2 = 0 \tag{1.8}$$

определяет характеристическую кривую ранга 1 квадрики Q [I, с.II7].

§ 2. Пары ассоциированных квадрик

Уравнения
$$\mathcal{F}=0\,,\quad \mathcal{F}_1=0\,, \tag{2.1}$$
$$\mathcal{F}=0\,,\quad \mathcal{F}_2=0 \tag{2.2}$$
определяют характеристики квадрики Q вдоль направлений A_0A_j на поверхности (A_0).

Рассмотрим квадрики $Q_1^{0,3}$ и $Q_2^{0,3}$, определяемые уравнениями $\mathcal{F}_1=0$ и $\mathcal{F}_2=0$. Имеем:
$$\delta\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_1(\pi_1^1-\pi_0^0),\quad \delta\mathcal{F}_2=-\mathcal{F}_2(\pi_1^1+\pi_0^0), \tag{2.3}$$
где δ —символ дифференцирования по вторичным параметрам, а π_0^0,π_1^1—значения форм ω_0^0, ω_1^1 при фиксированных первичных параметрах. Из (2.3) следует, что квадрики $Q_i^{0,3}$ —инвариантные. Для геометрической характеристики этих квадрик рассмотрим два пучка квадрик
$$\Phi_i\equiv\mathcal{F}_i-\lambda_i\mathcal{F}=0\qquad (i=1,2)\,. \tag{2.4}$$
Пучок $\Phi_i=0$ определяет однопараметрическое семейство квадрик, содержащих характеристику $\mathcal{F}=0,\mathcal{F}_i=0$ квадрики Q вдоль направления A_0A_j на поверхности (A_0). Величина λ_i равна значению полярной формы квадратичной формы Φ_i для точек A_0 и A_3. Следовательно, квадрика $Q_i^{0,3}$ —это такая квадрика пучка (2.4), относительно которой точки A_0 и A_3 полярно сопряжены. Из (I.7) следует, что прямая A_0A_3 является общей прямолинейной образующей квадрик $Q_1^{0,3}$ и $Q_2^{0,3}$.

§ 3. Характеристический признак конгруэнции квадрик Λи

Т е о р е м а 3.I. Если квадрика $Q_1^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью A_0A_3, являющейся асимптотической касательной поверхности (A_0), то квадрика $Q_2^{0,3}$ тоже распадается на пару плоскостей с осью A_0A_1, являющейся асимптотической касательной поверхности (A_0), и наоборот.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, например, квадрика $Q_1^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью A_0A_2, причем прямая A_0A_2 является асимптотической касательной поверхности (A_0). Имеем:
$$h_1=0\,,\ a_{21}^1=0\,,\ m_1^1=0\,,\ c_{11}=0\,,\ c_{12}=0\,. \tag{3.1}$$
Уравнение асимптотических линий поверхности (A_0) имеет вид:
$$c_{11}(\omega^1)^2+2(1+c_{12})\omega^1\omega^2+c_{22}(\omega^2)^2=0\,. \tag{3.2}$$
Так как прямая A_0A_2 является асимптотической касательной поверхности (A_0), то
$$c_{22}=0\,. \tag{3.3}$$
Замыкая уравнения
$$\omega_i^3-\omega^j=0\,, \tag{3.4}$$
и учитывая соотношения (3.2), получим
$$h_2=0\,,\ a_{12}^2=0\,. \tag{3.5}$$
Замыкая уравнение
$$\omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3=0\,, \tag{3.6}$$
находим
$$m_2^2=0\,. \tag{3.7}$$
Учитывая (3.I), (3.3), (3.5), (3.7), получаем
$$\mathcal{F}_2\equiv m_2^1x^2x^3-a_{22}^1(x^2)^2=0\,. \tag{3.8}$$
Следовательно, квадрика $Q_2^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью A_0A_1, являющейся асимптотической касательной поверх-

ности (A_0).

Т е о р е м а 3.2. Если квадрики $Q_1^{0,3}$, $Q_2^{0,3}$ распадаются на пары плоскостей с осями соответственно A_0A_2 и A_0A_1, то прямые A_0A_i являются асимптотическими касательными поверхности (A_0).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как квадрика $Q_i^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью A_0A_j, то

$$a_{ji}^i = 0, \ c_{ii} = 0, \ c_{ij} = 0, \ h_i = 0, \ m_i^i = 0. \qquad (3.9)$$

Уравнение (3.2) асимптотических линий поверхности (A_0) приводится, в силу соотношений (3.9), к виду

$$\omega^1\omega^2 = 0. \qquad (3.10)$$

Следовательно, прямые A_0A_1, A_0A_2 являются асимптотическими касательными поверхности (A_0).

Т е о р е м а 3.3. Квадрики $Q_1^{0,3}$ и $Q_2^{0,3}$ тогда и только тогда распадаются на пары плоскостей с осями A_0A_2 и A_0A_1, когда одна из квадрик $Q_i^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью A_0A_j, являющейся асимптотической касательной поверхности (A_0).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения теоремы непосредственно следует из совпадения соотношений (3.9) теоремы 3.2. и соотношений (3.I), (3.3), (3.5), (3.7) теоремы 3.I.

Т е о р е м а 3.4. Конгруэнция (Q) невырожденных линейчатых квадрик тогда и только тогда является конгруэнцией квадрик Ли своей фокальной поверхности (A_0), когда одна из квадрик $Q_i^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью A_0A_j,

являющейся асимптотической касательной поверхности (A_0).

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Необходимость. Пусть квадрика

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0 \qquad (3.11)$$

является квадрикой Ли поверхности (A_0). Тогда выполняются соотношения (3.9) и каждая из квадрик $Q_i^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью A_0A_j, являющейся асимптотической касательной поверхности (A_0). 2/Достаточность. Пусть, например, квадрика $Q_1^{0,3}$ распадается на пару плоскостей с осью A_0A_2. Тогда на основании теоремы 3.3, аналогичное свойство справедливо и для квадрики $Q_2^{0,3}$, т.е. соотношения (3.9) имеют место. Значит, Q -квадрика Ли поверхности (A_0).

Используя формулы

$$\omega_0^3 = 0, \ \omega_i^j = a_{ii}^j\omega^i, \ \omega_3^i = b_k^i\omega^k, \ \omega_i^3 = \omega^j, \qquad (3.12)$$
$$\omega_j^0 - \omega_3^i = m_j^i\omega^j, \ \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 = h_k\omega^k, \ \omega_3^0 = 0,$$

$$c_{12} - c_{21} = 0, \ b_1^2 m_2^1 - b_2^1 m_1^2 = 0, \qquad (3.13)$$

находим фокальные точки квадрики Ли Q, отличные от точек A_0 и A_3:

$$B_0 = m_1^2 m_2^1 A_0 + m_1^2 a_{22}^1 A_1 + m_2^1 a_{11}^2 A_2 + a_{11}^2 a_{22}^1 A_3,$$
$$B_i = m_i^j A_j + a_{ii}^j A_3. \qquad (3.14)$$

Приходим к следующему известному утверждению:

Т е о р е м а 3.5. Поверхность (A_0) является четырехкратной фокальной поверхностью конгруэнций (Q) квадрик Ли поверхности (A_0). Остальные четыре фокальные поверхности конгруэнции (Q) описываются вершинами четырехсторонника

Демулена [2].

Список литературы

I.Малаховский В.С.,Махоркин В.В.Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве."Тр.геом.семин.ВИНИТИ АН СССР",1974,6,с.II3-I33.

2.Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. ОНТИ,М.-Л.,I937.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Е.А.Митрофанова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПАРАБОЛОИДОВ В ТРЕХМЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном эквиаффинном пространстве исследуется конгруэнция M_2^1 гиперболических параболоидов,у которых на каждом параболоиде Q существует прямолинейная образующая ℓ_1,являющаяся фокальным многообразием параболоида Q [I]. Показано,что параболоиды Q конгруэнции M_2^1 огибают линейчатую поверхность S вдоль их общих прямолинейных образующих ℓ.

Определение I. Конгруэнцией M_2^1 называется конгруэнция гиперболических параболоидов Q в трехмерном эквиаффинном пространстве A_3,обладающая следующим свойством:на каждом параболоиде $Q \in M_2^1$ существует прямолинейная образующая ℓ_1,являющаяся фокальной прямой [I] параболоида Q.

Теорема I.Конгруэнции M_2^1 существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Доказательство.Отнесем конгруэнцию M_2^1 к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$,поместив вершину A на прямую ℓ_1, направив векторы $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ по прямолинейным образующим ℓ_1,ℓ_2