УДК 514.76

М. В. Сорокина , О. П. Сурина
Пензенский государственный университет, Россия
sorokina_m@list.ru, o.surina2013@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0006-7335-9016, https://orcid.org/0000-0002-4575-3984
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-6

Левоинвариантная параконтактная метрическая структура на группе *Sol*

В известном списке восьми трехмерных геометрий Тёрстона находится геометрия многообразия *Sol*. Многобразие *Sol* — связная односвязная группа Ли вещественных матриц специального вида. На многообразии *Sol* имеется левоинвариантная псевдориманова метрика, для которой группа левых сдвигов является максимальной просто-транзитивной группой изометрии. В настоящей работе доказано, что на многообразии *Sol* существует левоинвариантная дифференциальная 1-форма, которая вместе с левоинвариантной псевдоримановой метрикой определяют на *Sol* параконтактную метрическую структуру. Найдено трехпараметрическое семейство левоинвариантных параконтактных метрических связностей, то есть линейных связностей, инвариантных относительно левых сдвигов, в которых структурные тензоры параконтактной структуры ковариантно постоянны. Среди этих связностей выделена плоская связность. Установлено, что часть геодезических плоской связности являются геодезическими усеченной связности, представляющей собой ортогональную проекцию исходной связности на $2n$-мерное контактное распределение. Это означает, что данная связность согласована с контактным распределением. Таким образом, на многообразии *Sol* имеется псевдосубриманова струк-

---

Поступила в редакцию 22.04.2024 г.

тура, определяемая вполне неголономным контактным распределением и ограничением на него исходной псевдоримановой метрики.

Ключевые слова: группа *Sol*, параконтактная метрическая структура, параконтактная метрическая связность, усеченная связность

1. Введение

В известном списке восьми трехмерных геометрий Тёрстона находится геометрия многообразия *Sol* [1]. Многообразие *Sol* — это односвязная группа Ли матриц следующего вида:

$$Sol = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где определяющие ее элементы x, y, z — действительные числа. Умножая матрицу (1) на такую же матрицу с определяющими элементами c_1, c_2, c_3, заключаем, что левые сдвиги на *Sol* определяются формулами

$$\bar{x} = e^{-c_3}x + c_1,\ \bar{y} = e^{c_3}y + c_2,\ \bar{z} = z + c_3. \tag{2}$$

Дифференцируя (2) по параметрам c_1, c_2, c_3, находим левоинвариантные векторные поля — базис алгебры Ли группы Ли *Sol*:

$$X_1 = \partial_1,\ X_2 = \partial_2,\ X_3 = -x\partial_1 + y\partial_2 + \partial_3, \tag{3}$$

где $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ — естественный базис векторных полей на *Sol*.

Структурные уравнения группы имеют вид

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_1, X_3] = -X_1,\ [X_2, X_3] = X_2.$$

Здесь $[X, Y] = XY - YX$ — коммутатор векторных полей *X*, *Y*.

Левые сдвиги образуют полную разрешимую просто-транзитивную группу изометрий многообразия *Sol* с левоинвариантной римановой метрикой [1]

$$ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}\,dy^2 + dz^2.$$

2. Параконтактная метрическая структура

В настоящее время продолжается исследование контактных и параконтактных метрических структур [2—12]. Если исходное многообразие является группой Ли, то, как правило, исследуются левоинвариантные структуры.

Параконтактной метрической структурой на $(2n + 1)$-мерном гладком многообразии M называется четверка тензорных полей (η, ξ, φ, g), где η — линейная дифференциальная форма, ξ — векторное поле, φ — эндоморфизм модуля векторных полей на M , g — псевдориманова метрика, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\varphi^2 = id - \eta \otimes \xi, \tag{4}$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y), \tag{5}$$

$$d\eta(X,Y) = g(X,\varphi Y). \tag{6}$$

Из (6) следует, что

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0. \tag{7}$$

Условие (7) означает, что форма η является контактной, а ранг дифференциальной 2-формы $d\eta$ равен $2n$.

В равенствах (4—7) использованы следующие обозначения: $\otimes$ — тензорное произведение, $\wedge$ — внешнее дифференцирование, d — внешний дифференциал, X, Y — произвольные векторные поля на M.

Для параконтактной метрической структуры выполняются следующие равенства:

$$\eta(\xi) = 1, d\eta(X,\xi) = 0, \varphi(\xi) = 0,$$
$$\eta \circ \varphi = 0, g(X,\xi) = \eta(X) \tag{8}$$

Отметим также, что $2n$-мерное контактное распределение $H = \ker \eta$ называется *горизонтальным*, а 1-мерное распределение $V = \ker d\eta$ — *вертикальным*.

Пусть $f_t = exp\, tX$ — однопараметрическая подгруппа группы левых сдвигов на Sol, порожденная векторным полем X. Если η — левоинвариантная форма, то производная Ли вдоль X от формы η равна нулю: $L_X\eta = 0$. В координатах имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$X^p \partial_p \eta_i + \partial_i X^p \eta_p = 0. \tag{9}$$

Интегрируя уравнения (9) для базисных левоинвариантных векторных полей (3), находим общее решение:

$$\eta = a_1 e^z dx + a_2 e^{-z} dy + a_3 dz, \tag{10}$$

где a_1, a_2, a_3 — произвольные постоянные. Поскольку

$$d\eta = -a_1 e^z dx \wedge dz + a_2 e^{-z} dy \wedge dz,$$
$$\eta \wedge d\eta = a_1 a_2 dx \wedge dy \wedge dz,$$

то при $a_1 a_2 \neq 0$ формы вида (10) являются контактными. Анализируя алгебраические условия на структурные тензоры (4—6, 8) и условия их левоинвариантности, нетрудно убедиться, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *На группе Ли Sol существует левоинвариантная параконтактная структура. Определяющие ее тензоры имеют следующий вид:*

$$\eta = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} e^z & \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} e^z \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} e^z \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} e^z & \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Левоинвариантную псевдориманову метрику g можно получить, сдвинув псевдоевклидову метрику $ds^2 = = dx^2 + dy^2 - dz^2$ касательного пространства единицы группы в произвольную точку. Заметим, что контактная форма η и метрика g однозначно определяют инвариантные векторное поле ξ и структурный эндоморфизм φ.

3. Левоинвариантные параконтактные метрические связности

Пусть $\nabla\left(\Gamma_{ij}^{k}\right)$ — связность Леви-Чивиты, то есть линейная метрическая связность без кручения. Линейная связность $\widetilde{\nabla}\left(\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}\right)$ называется *параконтактной метрической связностью*, если $\widetilde{\nabla}g = 0, \widetilde{\nabla}\eta = 0$. Так как разность двух связностей является тензором, то $\widetilde{\nabla} = \nabla + T$, где $T\left(T_{ij}^{k}\right)$ — тензор деформации связности ∇. Связность $\widetilde{\nabla}$ является метрической тогда и только тогда, когда ковариантный тензор деформации T_{ijk} кососимметричен по последним двум аргументам, то есть

$$T_{ijk} + T_{ikj} = 0,\ \ T_{ijk} = T_{ij}^{p} g_{kp}.$$

Связность Леви-Чивиты ∇ псевдоримановой метрики g определяется коэффициентами

$$\Gamma_{ij}^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ \Gamma_{ij}^{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{ij}^{3} = \begin{pmatrix} e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *На многообразии Sol существует трехпараметрическое семейство левоинвариантных параконтактных метрических связностей. Ковариантный тензор деформации таких связностей имеет вид*

$$T = c_{113} e^{2z} dx \otimes dx \wedge dz + c_{223} e^{-2z} dy \otimes dy \wedge dz +$$

$$+c_{331}e^{z}dz \otimes dz\wedge dx + c_{332}e^{-z}dz\otimes dz\wedge dy +$$

$$+c_{123}dx \otimes dy\wedge dz + c_{213}dy\otimes dx\wedge dz,$$

где постоянные c_{ijk} удовлетворяют условиям

$$1 - c_{113} - c_{123} = 0,\quad 1 + c_{213} + c_{223} = 0,\quad c_{331} + c_{332} = 0.$$

Доказательство. Ковариантное постоянство контактной формы принимает следующий вид:

$$\tilde{\nabla}_i\eta_j = \partial_i\eta_j - \tilde{\Gamma}^p_{ij}\eta_p = \partial_i\eta_j - \Gamma^p_{ij}\eta_p - T^p_{ij}\eta_p =$$

$$= \partial_i\eta_j - \frac{1}{2}g^{ps}\left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\right)\eta_p - T_{ijs}g^{sp}\eta_p =$$

$$= \partial_i\eta_j - \frac{1}{2}\xi^s\left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is}\right) - T_{ijs}\xi^s = 0.$$

Здесь мы учли, что $g_{ij} = g_{ij}(z)$, $\xi^3 = 0, \xi^i = g^{ip}\eta_p$.

Расписывая полученные равенства для различных индексов, находим, что

$$\begin{aligned} &T_{112} = T_{212} = T_{312} = 0,\ e^{z} + e^{-z}T_{131} + e^{z}T_{132} = 0, \\ &e^{-z} - e^{-z}T_{231} - e^{z}T_{232} = 0,\ e^{-z}T_{331} + e^{z}T_{332} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку связность Леви-Чивиты ∇ инвариантна относительно левых сдвигов, то $\tilde{\nabla}$ инвариантна тогда и только тогда, когда инвариантен тензор деформации T, следовательно, производная Ли вдоль базисных левоинвариантных векторных полей (3) равна нулю, а значит, компоненты T_{ijk} должны быть решением следующей системы уравнений:

$$X^p_\alpha\partial_p T_{ijk} + \partial_i X^p_\alpha T_{pjk} + \partial_j X^p_\alpha T_{ipk} + \partial_k X^p_\alpha T_{ijp} = 0,\ \ \alpha = 1, 2, 3.$$

Интегрируя данную систему и учитывая (11), находим:

$$T_{113} = c_{113}e^{2z},\ T_{223} = c_{223}e^{-2z},\ T_{331} = c_{331}e^{z},$$

$$T_{332} = c_{332}e^{-z},\ \ T_{123} = c_{123},\ T_{213} = c_{213},$$

что и доказывает данное утверждение.

Если тензор кривизны $\tilde{R}$ связности $\tilde{\nabla}$ равен нулю (связность плоская, но с кручением), то

$$\tilde{\Gamma}^1_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ce^{-z} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}^2_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -ce^{z} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma}^3_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ce^{z} & -ce^{-z} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Связность, согласованная с контактным распределением

Линейная связность ∇ называется *согласованной с распределением H*, если через каждую точку в каждом направлении, принадлежащем H, проходит единственная геодезическая связности ∇, касающаяся распределения H [13]. Горизонтальная кривая γ: $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$, s — канонический параметр, называется *геодезической усеченной связности* $\overline{\nabla}$, если $\overline{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$, где $\overline{\nabla}$ — ортогональная проекция связности ∇ на распределение H, $\dot{\gamma}$ — касательный вектор кривой γ [14; 15].

Теорема 3. *Контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ с ненулевыми компонентами $\tilde{\Gamma}^1_{31} = 1$, $\tilde{\Gamma}^2_{32} = -1$ согласована с контактным распределением $H = ker\,\eta$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо установить, что часть геодезических связности $\tilde{\nabla}$ совпадает с геодезическими усеченной связности $\overline{\nabla}$. Общее решение дифференциальных уравнений геодезических $\tilde{\nabla}$

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

имеет следующий вид:

$$x = -\frac{a^1}{a}e^{-as} + b^1, \;\; y = -\frac{a^2}{a}e^{as} + b^2, \;\; z = as + b^3 \quad (a \neq 0).$$

В силу однородности многообразия Sol можно ограничиться геодезическими, выходящими из единицы группы. В этом случае при $s = 0$ x, y, z должны обращаться в нуль. Поэтому

$$\frac{a^1}{a} = b^1, \quad \frac{a^2}{a} = -b^2, \quad b^3 = 0,$$

а уравнения геодезических примут вид

$$x = -b^1 a^{-as} + b^1, \quad y = -b^2 e^{as} + b^2, \quad z = as.$$

Для нахождения геодезических усеченной связности рассмотрим неголономное поле ортонормированных реперов $\{p, E_i\}$, адаптированное к структуре почти произведения $H \oplus V$:

$$E_1 = \partial_3, \qquad E_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} \partial_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{z} \partial_2,$$
$$E_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} \partial_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{z} \partial_2, \tag{12}$$

где E_1 и E_2 принадлежат контактному распределению:

$$\eta(E_1) = \eta(E_2) = 0,$$

а $E_3 = \xi$;

$$g(E_1, E_1) = -1, \; g(E_2, E_2) = g(E_3, E_3) = 1,$$
$$g(E_i, E_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Дуальный реперу $\{p, E_i\}$ корепер $\{p, \theta^j\}$ определяется условием $\theta^j(E_i) = \delta_i^j$ и имеет следующие координатные формы:

$$\theta^1 = dz, \qquad \theta^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{z} dx - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} dy,$$
$$\theta^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{z} dx + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} dy.$$

Вычисляя неголономные коэффициенты связности Леви-Чивиты ∇, находим

$$\nabla_{E_2} E_3 = \nabla_{E_3} E_2 = E_1, \qquad \nabla_{E_3} E_1 = E_2, \qquad \nabla_{E_2} E_1 = E_3,$$
$$\nabla_{E_1} E_1 = \nabla_{E_1} E_2 = \nabla_{E_1} E_3 = \nabla_{E_2} E_2 = \nabla_{E_3} E_3 = 0,$$

откуда следует, что

$$\overline{\nabla}_{E_i} E_j = 0, \qquad i, j = 1, 2,\ E_i \in H.$$

Пусть v^k — естественные координаты векторного поляv, ω^k — неголономные:

$$v = v^k \partial_k = \omega^k E_k.$$

Из (12) получим

$$\partial_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^z E_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} e^z E_3,$$

$$\partial_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} E_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} E_3,$$

$$\partial_3 = E_1,$$

поэтому

$$v = v^1 \partial_1 + v^2 \partial_2 + v^3 \partial_3 =$$

$$= v^3 E_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} v^1 e^z - \frac{\sqrt{2}}{2} v^2 e^{-z}\right) E_2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} v^1 e^z + \frac{\sqrt{2}}{2} v^2 e^{-z}\right) E_3.$$

Если $v \in H$, $v = \omega^1 E_1 + \omega^2 E_2$, то условие горизонтальности векторного поля v примет вид

$$v^1 e^z + v^2 e^{-z} = 0,$$

а

$$\omega^1 = v^3, \qquad \omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} v^1 e^z - \frac{\sqrt{2}}{2} v^2 e^{-z}.$$

Заменяя неголономные координаты в уравнениях геодезических усеченной связности естественными, получаем те же дифференциальные уравнения геодезических, что и для связности $\widetilde{\nabla}$ с дополнительным условием горизонтальности касательного поля $\dot{\gamma}$. В результате получаем параметрические уравнения геодезических усеченной связности, выходящих из единицы группы *Sol*:

$$x = b(1 - e^{-as}),\ \ y = b(1 - e^{as}),\ \ z = as,$$

которые являются частью геодезических связности $\widetilde{\nabla}$ при $b^1 = b^2 = b$, что и доказывает данное утверждение.

Заметим, что при $b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $|\dot{\gamma}| = 0$ имеем две изотропные геодезические, выходящие из единицы группы, — изотропный конус.

Псевдориманову метрику g на многообразии *Sol* запишем следующим образом:

$$ds^2 = {\theta^3}^2 + {\theta^2}^2 - {\theta^1}^2 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^z dx + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-z}dy\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^z dx - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-z}dy\right)^2 - dz^2.$$

Так как контактное распределение *H* определяется уравнением $\theta^3 = 0$, то ограничение метрики g на распределение *H* имеет вид

$$ds^2|_H = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^z dx + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-z}dy\right)^2 - dz^2.$$

Нетрудно убедиться, что связность $\widetilde{\nabla}$, указанная в теореме 3, согласована с метрикой, то есть $\widetilde{\nabla}g|_H = 0$, и если векторные поля X, Y горизонтальные, то и векторное поле $Z = \widetilde{\nabla}_X Y$ также является горизонтальным.

Таким образом, на многообразии *Sol* имеем псевдосубриманову структуру, определяемую вполне неголономным контактным распределением $H = \ker\eta$ и псевдоримановой метрикой $g|_H$, а ограничение $\widetilde{\nabla}$ на *H* является внутренней метрической связностью.

Список литературы

1. *Терстон У.* Трехмерная геометрия и топология. М., 2001.

2. *Банару М.В.* О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4-многообразиях // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2018. Т. 1. С. 67—70.

3. *Галаев С.В.* ∇_N-Эйнштейновы почти контактные метрические многообразия // Вестник Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2021. №70. С. 5—15.

4. *Паньженский В.И., Растрепина А.О.* Левоинвариантная контактная метрическая структура на многообразии *Sol* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2020. Т. 162, №1. С. 77—90.

5. *Паньженский В.И., Растрепина А.О.* Левоинвариантная парасасакиева структура на группе Гейзенберга // Вестник Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2022. №75. С. 38—51.

6. *Смоленцев Н.К.* Левоинвариантные парасасакиевы структуры на группах Ли // Вестник Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2019. №62. С. 27—37.

7. *Смоленцев Н.К., Шагабудинова И.Ю.* О парасасакиевых структурах на пятимерных алгебрах Ли // Вестник Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2021. №69. С. 37—52.

8. *Calvaruso G.* Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures // J. Geom. Phys. 2013. Vol. 69. P. 60—63.

9. *Calvaruso G., Martin-Molina V.* Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle // Annali di Matematica Puraed Applicata. 2015. Vol. 194. P. 1359—1380.

10. *Calvaruso G., Perrone A.* Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups // Periodica Mathematica Hungarica. 2014. Vol. 69. P. 97—108.

11. *Calvaruso G., Perrone A.* Five-dimensional paracontact Lie algebras // Diff. Geom. and its Appl. 2016. Vol. 45. P. 115—129.

12. *Diatta A.* Left invariant contact structures on Lie groups // Diff. Geom. and its Appl. 2008. Vol. 26, №5. P. 544—552.

13. *Паньженский В.И., Растрепина А.О.* Контактная и почти контактная структура на вещественном расширении плоскости Лобачевского // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2021. Т. 163, №3-4. С. 291—303.

14. *Вершик А.М., Фадеев Л.Д.* Лагранжева механика в инвариантном изложении. Проблемы теоретической физики. Л., 1975. С. 129—141.

15. *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. 1987. Т. 16. С. 5—85.

Для цитирования: *Сорокина М.В., Сурина О.П.* Левоинвариантная параконтактная метрическая структура на группе *Sol* // ДГМФ. 2024. №55 (1). С. 55—67. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-6.

MSC 2010: 58A05 53D10

M. V. Sorokina, O. P. Surina
Penza State University
40 Krasnay str., Penza, 440026, Russia
sorokina_m@list.ru, o.surina2013@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-6

Left-invariant paracontact metric structure on a group *Sol*

Submitted on April 22, 2024

Among Thurston's famous list of eight three-dimensional geometries is the geometry of the manifold *Sol*. The variety *Sol* is a connected simply connected Lie group of real matrices of a special form. The manifold *Sol* has a left-invariant pseudo-Riemannian metric for which the group of left shifts is the maximal simply transitive isometry group. In this paper, we prove that on the manifold *Sol* there exists a left-invariant differential 1-form, which, together with the left-invariant pseudo-Riemannian metric, defines a paracontact metric structure on *Sol*. A three-parameter family of left-invariant paracontact metric connections is found, that is, linear connections invariant under left shifts, in which the structure tensors of the paracontact structure are covariantly constant. Among these connections, a flat connection is distinguished. It has been established that some geodesics of a flat connection are geodesics of a truncated connection, which is an orthogonal projection of the original connection onto a 2n-dimensional contact distribution. This means that this connection is consistent with the contact distribution. Thus, the manifold *Sol* has a pseudo-sub-Riemannian structure determined by a completely non-holonomic contact distribution and the restriction of the original pseudo-Riemannian metric to it.

Keywords: Sol group, paracontact metric structure, paracontact metric connection, truncated connection

References

1. *Thurston, W.:* Three-dimensional geometry and topology. Moscow (2001).

2. *Banaru, M. V.:* The Almost Contact Metric Hypersurfaces with Small Type Numbers in W_4-manifolds. Moscow Univ. Math. Bull., 73, 38—40 (2018).

3. *Galaev, S. V.:* ∇_N-Einstein almost contact metric manifolds. Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh., 70, 5—15 (2021).

4. *Panzhenskii, V.I., Rastrepina, A.O.:* The left-invariant contact metric structure on the Sol manifold. Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki. **162**:1, 77—90 (2020).

5. *Panzhensky, V.I., Rastrepina, A.O.:* Left-invariant para-Sasakian structure on the Heisenberg group. Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh., 75, 38—51 (2022).

6. *Smolentsev, N.K.:* Left-invariant para-Sasakian structures on Lie groups. Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh., 62, 27—37 (2019).

7. *Smolentsev, N.K., Shagabudinova, I.Yu.:* On para-Sasakian structures on five-dimensional Lie algebras. Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh., 69, 37—52 (2021).

8. *Calvaruso, G.:* Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures. J. Geom. Phys., 69, 60—63 (2013).

9. *Calvaruso, G., Martin-Molina V.:* Paracontact metric structures on the unit tangent spherebundle. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 194, 1359—1380 (2015).

10. *Calvaruso, G., Perrone, A.:* Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups. Periodica Mathematica Hungarica, 69, 97—108 (2014).

11. *Calvaruso, G., Perrone, A.:* Five-dimensional paracontact Lie algebras. Diff. Geom. and its Appl., 45, 115—129 (2016).

12. *Diatta, A.:* Left invariant contact structures on Lie groups. Diff. Geom. and its Appl., **26**:5, 544—552 (2008).

13. *Panzhensky, V.I., Rastrepina, A.O.:* Contact and almost contact structure on the real extension of the Lobachevsky plane. Uchen. zap. Kazan. univ. Ser. Fiz.-math. sciences. **163**:3-4, 291—303 (2021).

14. *Vershik, A.M., Fadeev, L.D.:* Lagrangian mechanics in an invariant presentation. Problems of theoretical physics. Leningrad, 129—141 (1975).

15. *Vershik, A.M., Gershkovich, V.Ya.:* Nonholonomic dynamical systems. Geometry of distributions and variational problems. Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 16, 5—85 (1987).

For citation: Sorokina, M.V., Surina, O.P. Left-invariant paracontact metric structure on a group Sol. DGMF, 55 (1), 55—67 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-6.