2. *Skriagina A.* The structure of equipment of centered plane surface // New Geometry of Nature. Kazan, 2003. P. 197—200.

3. *Остиану Н.М.* Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве // Труды геометрического семинара. М., 1969. Т. 2. С. 247—262.

A. Vyalova

On the Ostianu mode for inverting three-indexes tensors with an example of point-plane surface

In many-dimensional projective space the point-plane surface is considered. Assuming the existence of relative non-trivial invariant constructed from the components of subtensor of the first order fundamental object of surface, the inverted fundamental subobject of the surface is introduced. By the mode of N. M. Ostianu it is proved, that the inverted subobject is tensor.

УДК 514.76

М. В. Глебова

Пензенский государственный университет

Продолжение векторных полей с гладких многообразий на их прямое произведение

Описано построение продолжений векторных полей с гладких многообразий в прямое произведение этих гладких многообразий.

Ключевые слова: векторное поле, гладкое многообразие, прямое произведение многообразий.

Рассмотрим гладкие многообразия ${}^{a}M_{n_a}$ размерности n_a $(a=1,2)$ класса C^∞. Обозначим через $C^\infty({}^{a}M_{n_a})$ алгебру гладких C^{∞}-функций, заданных на ${}^{a}M_{n_a}$. Стандартным образом строим прямое произведение ${}^{1}M_{n_1} \times {}^{2}M_{n_2}$ многообразий ${}^{1}M_{n_1}$ и ${}^{2}M_{n_2}$. Полученное многообразие имеет размерность $n_1 + n_2$. В дальнейшем это многообразие будем обозначать $M_n = {}^{1}M_{n_1} \times {}^{2}M_{n_2}$, где $n = n_1 + n_2$.

Рассмотрим естественные проекции ${}^{a}\pi : M_n \to {}^{a}M_{n_a}$, определенные условием ${}^{a}\pi(p) = {}^{a}p$, где $p = ({}^{1}p, {}^{2}p) \in M_n$. Естественные проекции позволяют функции, заданные на ${}^{a}M_{n_a}$, поднять (продолжить) на M_n. Пусть ${}^{a}f \in C^{\infty}({}^{a}M_{n_a})$.

Определение 1. *Функция* $({}^{a}f)_{(0)}$ *на* M_n*, определенная условием* $({}^{a}f)_{(0)} = {}^{a}f \circ {}^{a}\pi$*, называется естественным продолжением функции* ${}^{a}f$ *с* ${}^{a}M_{n_a}$ *на* M_n $(a = 1, 2)$.

Для любой точки $p \in M_n$ имеем

$$({}^{a}f)_{(0)}(p) = ({}^{a}f \circ {}^{a}\pi)(p) = {}^{a}f({}^{a}\pi(p)) = {}^{a}f({}^{a}p).$$

Для упрощения записи иногда выражение $({}^{a}f)_{(0)}$ будем обозначать символом ${}^{a}f_{(0)}$.

Предложение 1. *Для любых функций имеют место следующие равенства:*

(1) $({}^{a}f + {}^{a}g)_{(0)} = {}^{a}f_{(0)} + {}^{a}g_{(0)}$;

(2) $(\lambda\, {}^{a}f)_{(0)} = \lambda\, {}^{a}f_{(0)}$;

(3) $({}^{a}f\, {}^{a}g)_{(0)} = {}^{a}f_{(0)}\, {}^{a}g_{(0)}$.

Доказательство. (1) Для любой точки $p = ({}^{1}p, {}^{2}p) \in M_n$ по определению 1 имеем

$$({}^{a}f + {}^{a}g)_{(0)}(p) = (({}^{a}f + {}^{a}g) \circ {}^{a}\pi)(p) = ({}^{a}f + {}^{a}g)({}^{a}\pi(p)) =$$
$$= {}^{a}f({}^{a}\pi(p)) + {}^{a}g({}^{a}\pi(p)) = {}^{a}f_{(0)}(p) + {}^{a}g_{(0)}(p).$$

Доказательство равенств (2) и (3) аналогичное.

Введенное понятие продолжения функций на M_n можно обобщить на отображение многообразия ${}^aM_{n_a}$ в некоторое многообразие ${}^a\tilde{M}_{n_a}$.

Пусть ${}^aF : {}^aM_{n_a} \to {}^a\tilde{M}_{n_a}$.

Определение 2. *Естественным продолжением отображения* ${}^aF$ *на* ${}^a\tilde{M}_{n_a}$ *называется отображение* $({}^aF)_{(0)} : M_n \to {}^a\tilde{M}_{n_a}$, *определенное условием* $({}^aF)_{(0)} = {}^aF \circ {}^a\pi$.

Для любой точки $p \in M_n$ имеем

$$({}^aF)_{(0)}(p) = ({}^aF \circ {}^a\pi)(p) = {}^aF({}^a\pi(p)) = {}^aF({}^ap) \in {}^a\tilde{M}_{n_a}.$$

В частности, если ${}^a\tilde{M}_{n_a} = R$, то вернемся к продолжениям функций на прямое произведение.

Свойства, справедливые для продолжений функций, справедливы и для продолжений отображений.

Теперь перейдем к построению естественного продолжения векторных полей с сомножителей ${}^aM_{n_a}$ $(a = 1, 2)$ на прямое произведение этих многообразий. Прежде всего докажем следующее предложение.

Предложение 2. *Если* X *— векторное поле на* M_n *такое, что* $X\,{}^af_{(0)} = 0$ *для любых функций* ${}^af \in C^\infty({}^aM_{n_a})$, *то* $X = 0$.

Доказательство. Пусть p — произвольная точка на M_n, $({}^1U \times {}^2U, ({}^1x^i)_{(0)}, ({}^2x^{\bar{\alpha}})_{(0)})$, $i = 1, \ldots, n_1$, $\bar{\alpha} = 1, \ldots, n_2$ — координатная окрестность, содержащая точку p. Тогда каждое векторное поле X, определенное в окрестности точки p, можно разложить по векторным полям $\dfrac{\partial}{\partial({}^1x^i)_{(0)}}$, $\dfrac{\partial}{\partial({}^2x^{\bar{\alpha}})_{(0)}}$:

$$X=\xi^{i}\frac{\partial}{\partial({}^{1}x^{i})_{(0)}}+\xi^{n_1+\bar{\alpha}}\frac{\partial}{\partial({}^{2}x^{\bar{\alpha}})_{(0)}}.$$

В силу произвольности функций ${}^{1}f$ и ${}^{2}f$ условие $X\,{}^{a}f_{(0)}=0$ выполняется и для функций ${}^{1}x^{i}$, ${}^{2}x^{\bar{\alpha}}$.

$$X({}^{1}x^{i})_{(0)}(p)=\xi^{j}(p)\frac{\partial({}^{1}x^{i})_{(0)}}{\partial({}^{1}x^{j})_{(0)}}(p)+\xi^{n_1+\bar{\beta}}(p)\frac{\partial({}^{1}x^{i})_{(0)}}{\partial({}^{2}x^{\bar{\beta}})_{(0)}}(p)=$$
$$=\xi^{j}(p)\delta^{i}_{j}=\xi^{i}(p).$$

Следовательно, $\xi^{i}(p)=0$. Аналогично находим, что

$$X({}^{2}x^{\bar{\alpha}})_{(0)}(p)=\xi^{j}(p)\frac{\partial({}^{2}x^{\bar{\alpha}})_{(0)}}{\partial({}^{1}x^{j})_{(0)}}(p)+\xi^{n_1+\bar{\beta}}\frac{\partial({}^{2}x^{\bar{\alpha}})_{(0)}}{\partial({}^{2}x^{\bar{\beta}})_{(0)}}(p)=$$
$$=\xi^{n_1+\bar{\beta}}(p)\delta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}=\xi^{n_1+\bar{\alpha}}(p)=0.$$

Таким образом, векторное поле X, удовлетворяющее условию $X\,{}^{a}f_{(0)}=0$, для любых функций ${}^{a}f\in C^{\infty}({}^{a}M_{n_a})$ является нулевым.

Предложение 3. *1. Существует единственное векторное поле X на M_n, удовлетворяющее условиям*

$$X\,{}^{1}f_{(0)}=({}^{1}X\,{}^{1}f)_{(0)},\ X\,{}^{2}f_{(0)}=0 \tag{1}$$

для любых функций ${}^{a}f\in C^{\infty}({}^{a}M_{n_a})$ $(a=1,2)$.

2. Существует единственное векторное поле X на M_n удовлетворяющее условиям

$$X\,{}^{2}f_{(0)}=({}^{2}X\,{}^{2}f)_{(0)},\ X\,{}^{1}f_{(0)}=0$$

для любых функций ${}^{a}f\in C^{\infty}({}^{a}M_{n_a})$ $(a=1,2)$.

Доказательство. Приведем подробное доказательство только первого предложения, так как доказательство второго предложения аналогичное.

С у щ е с т в о в а н и е. Пусть ${}^1X$ — произвольное векторное поле на ${}^1M_{n_1}$; ${}^1\xi^i$ — координаты этого векторного поля ${}^1X$ на ${}^1U$, где $({}^1U, {}^1x^i)$ — карта на ${}^1M_{n_1}$. В области каждой карты $({}^1U \times {}^2U, ({}^1x^i)_{(0)}, ({}^2x^{\bar\alpha})_{(0)})$ $(i = 1,\dots,n_1,\ \bar\alpha = 1,\dots,n_2)$ на M_n определим функции ξ^A $(A = 1,\dots,n_1+n_2)$ следующим образом:

$$\xi^A = \begin{cases} ({}^1\xi^i)_{(0)},\ \textit{если}\ A = 1,\dots,n_1, \\ 0,\ \textit{если}\ A = n_1+1,\dots,n_1+n_2. \end{cases} \tag{2}$$

Аналогичные функции

$$\xi^{A'} = \begin{cases} ({}^1\xi^{i''})_{(0)},\ \textit{если}\ A' = 1,\dots,n_1, \\ 0,\ \textit{если}\ A' = n_1+1,\dots,n_1+n_2 \end{cases}$$

получим в другой карте $({}^1V \times {}^2V, ({}^1x^{i''})_{(0)}, ({}^2x^{\bar\alpha'})_{(0)})$, где ${}^1\xi^{i''}$ — координаты векторного поля ${}^1X$ на ${}^1V$.

Покажем, что функции ξ^A при переходе к другой карте преобразуются по следующему закону:

$$\xi^{A'} = \xi^B \frac{\partial x^{A'}}{\partial x^B}. \tag{3}$$

Если $A' \in \{1,\dots,n_1\}$ (положим $A' = i'$), то правая часть соотношения (3) примет вид

$$\xi^B \frac{\partial x^{A'}}{\partial x^B} = \xi^B \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^B} = \xi^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} + \xi^{n_1+\bar\beta} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{n_1+\bar\beta}}.$$

Так как $\xi^{n_1+\bar\beta} = 0$ на основании соотношений (2), то

$$\xi^B \frac{\partial x^{A'}}{\partial x^B} = \xi^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = ({}^1\xi^j)_{(0)} \frac{\partial ({}^1x^{i''})_{(0)}}{\partial ({}^1x^j)_{(0)}} =$$

$$= ({}^1\xi^j)_{(0)} \left(\frac{\partial\, {}^1x^{i''}}{\partial\, {}^1x^j} \right)_{(0)} = \left({}^1\xi^j \frac{\partial\, {}^1x^{i''}}{\partial\, {}^1x^j} \right)_{(0)}.$$

Так как ${}^1X$ — векторное поле на ${}^1M_{n_1}$, то имеют место равенства ${}^1\xi^{i'} = {}^1\xi^j \dfrac{\partial {}^1x^{i'}}{\partial {}^1x^j}$. Тогда

$$\left({}^1\xi^j \frac{\partial {}^1x^{i'}}{\partial {}^1x^j} \right)_{(0)} = ({}^1\xi^{i'})_{(0)} = \xi^{i'} = \xi^{A'}.$$

Если $A' \in \{n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2\}$, то $\xi^{A'} = 0$. Поэтому

$$\xi^B \frac{\partial x^{A'}}{\partial x^B} = \xi^j \frac{\partial x^{A'}}{\partial x^j} = 0 = \xi^{A'},$$

так как $\dfrac{\partial x^{A'}}{\partial x^j} = 0.$

Таким образом, показали справедливость соотношения (3). Следовательно, задание функции вида (2) в каждой карте определяет на M_n векторное поле X, ограничение которого на координатную окрестность ${}^1U \times {}^2U$ локально имеет вид

$$X = ({}^1\xi^i)_{(0)} \frac{\partial}{\partial ({}^1x^i)_{(0)}}.$$

Покажем, что построенное векторное поле удовлетворяет условиям теоремы.

Для любых ${}^af \in C^\infty({}^aM_{n_a})$ $(a = 1, 2)$ имеем

$$X({}^1f)_{(0)} = ({}^1\xi^i)_{(0)} \frac{\partial ({}^1f)_{(0)}}{\partial ({}^1x^i)_{(0)}} = \left({}^1\xi^i \frac{\partial {}^1f}{\partial {}^1x^i} \right)_{(0)} = ({}^1X\,{}^1f)_{(0)},$$

$$X({}^2f)_{(0)} = ({}^1\xi^i)_{(0)} \frac{\partial ({}^2f)_{(0)}}{\partial ({}^1x^i)_{(0)}} = 0.$$

Е д и н с т в е н н о с т ь. Предположим, что существует другое векторное поле Y на M_n, удовлетворяющее условиям (1):

$$Y\,{}^1f_{(0)} = ({}^1Y\,{}^1f)_{(0)},\ Y\,{}^2f_{(0)} = 0.$$

Тогда

$$X^1 f_{(0)} - Y^1 f_{(0)} = 0,\ X^2 f_{(0)} - Y^2 f_{(0)} = 0\,.$$

Отсюда заключаем, что

$$(X - Y)^1 f_{(0)} = 0,\ (X - Y)^2 f_{(0)} = 0\,.$$

Следовательно, на основе предложения 2 получили, что векторное поле $X - Y$ является нулевым. Значит, $X = Y$.

Доказанное предложение позволяет ввести следующее определение.

Определение 3. *Для каждого векторного поля* ${}^aX$ *единственное векторное поле* ${}^aX^{(0)}$ *на* M_n*, удовлетворяющее условиям*

$${}^aX^{(0)}({}^bf)_{(0)} = \begin{cases} ({}^aX\,{}^af)_{(0)},\ \text{если } a = b, \\ 0,\ \text{если } a \neq b \end{cases}$$

для любых функций ${}^bf \quad (b = 1,2)$*, называется естественным продолжением векторного поля* ${}^aX$ *с многообразия* ${}^aM_{n_a}$ *на многообразие* $M_n = {}^1M_{n_1} \times {}^2M_{n_2}$.

Предложение 4. *Имеют место тождества*

$$(1)\ ({}^aX + {}^aY)^{(0)} = {}^aX^{(0)} + {}^aY^{(0)},$$

$$(2)\ [{}^aX, {}^aY]^{(0)} = [{}^aX^{(0)}, {}^aY^{(0)}].$$

Доказательство тождества (1) легко получить прямыми вычислениями. Подробнее остановимся на доказательстве тождества (2).

Для любой функции ${}^bf \in C^\infty({}^bM_{n_b})$ имеем: если $a = b$, то

$$[{}^aX, {}^aY]^{(0)}\,{}^af_{(0)} = {}^aX^{(0)}({}^aY^{(0)}\,{}^af_{(0)}) - {}^aY^{(0)}({}^aX^{(0)}\,{}^af_{(0)}) =$$

$$= {}^aX^{(0)}({}^aY\,{}^af)_{(0)} - {}^aY^{(0)}({}^aX\,{}^af)_{(0)} =$$

$$= ({}^aX({}^aY\,{}^af))_{(0)} - ({}^aY({}^aX\,{}^af))_{(0)} =$$

$$= ({}^aX({}^aY\,{}^af) - ({}^aY({}^aX\,{}^af))_{(0)} =$$

$$= ([{}^aX, {}^aY]\,{}^af)_{(0)} = [{}^aX, {}^aY]^{(0)}\,{}^af_{(0)},$$

если $a \neq b$, то получаем также верное равенство.

Список литературы

Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

M. Glebova

Continuation of vector fields from smooth manifold in their direct product

Construction of continuations of vector fields from smooth manifolds in direct product of these smooth manifold is described.

УДК 514.76

А.И. Егоров

Пензенский государственный педагогический университет им. В.Г. Белинского

О некоторых свойствах максимально подвижного пространства *T* общей теории относительности

Рассматривается пространство T общей теории относительности, допускающее полную группу движений максимально порядка G_6. В этом пространстве находятся ковариантно постоянные тензорные поля ξ^i, a_{ij}, b_{ij}.

Ключевые слова: группа движений, ковариантно постоянные тензорные поля.