O. Belova

Inducing an analog of Neifeld's connection
on the Grassman-like manifold of centered planes

Grassman-like manifold $Gr^*(m,n)$ of centered m-planes is considered in the projective space P_n. Principal fiber bundle is arised above it. Analog of Neifeld's connection is given in this fibering. It is proved, that the analog of Norden's normalization of Grassman-like manifold of centered planes induces this connection.

УДК 514.76

И. М. Бурлаков
Московский педагогический государственный университет

Геометрические структуры на линейных алгебрах

Рассматриваются пространства с фундаментальной формой произвольной степени. Такие пространства можно реализовать на линейных алгебрах, если в качестве фундаментальной формы брать детерминант произвольного элемента или произведения нескольких элементов, если такое произведение дает форму со значениями в основном поле.

Ключевые слова: алгебры, геометрические структуры, группа движений, почти евклидовы пространства.

Среди геометрических структур, определяемых на основе линейного пространства, можно выделить один класс, который представляется естественным обобщением евклидовых пространств. Геометрия пространств из этого класса определяется каким-либо однородным многочленом (формой) степени m, инвариантным относительно некоторой подгруппы линейной группы. При $m=2$ получаются евклидовы или псевдоевклидовы пространства, а о пространствах с фундаментальными формами четвертой степени упоминал еще Риман в своей знаменитой лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» [1] .

Основная трудность в исследовании таких пространств при $m>2$ заключается в том, что технически сложно найти непрерывную группу преобразований, оставляющих неизменной фундаментальную форму. Однако эту техническую трудность можно обойти, если связать фундаментальную форму с некоторой линейной алгеброй.

Пусть A_n — линейная алгебра над полем вещественных чисел, $\dim A_n = n$, и $e_1,\ldots,e_n$ некоторый базис линейного пространства алгебры A_n. Введем понятие *детерминанта* произвольного элемента алгебры A_n. Для этого рассмотрим линейное уравнение $a\cdot x = b$, где $a,b,x \in A_n$, которое будет эквивалентно системе линейных вещественных уравнений

$$c^q_{pk}\,a^p x^k = b^q\,, \tag{1}$$

где c^q_{pk} — структурные константы, то есть $e_p\cdot e_k = c^q_{pk}e_q$. Тогда детерминантом элемента $a = a^k e_k$ называется определитель $\Delta(a)\equiv \det(c^q_{pk}a^p)$ системы (1).

Детерминант играет существенную роль в теории линейных алгебр. Например, элемент $a=a^k e_k \in A_n$ обратим тогда и только тогда, когда $\Delta(a)\neq 0$. Впрочем, для геометрических приложений наиболее важно следующее свойство детерминантов.

Теорема (*о мультипликативности детерминанта*). Пусть A_n — ассоциативная алгебра, тогда для любых $a, b \in A_n$

$$\Delta(a \cdot b) = \Delta(a)\Delta(b)\,. \tag{2}$$

Действительно, $(a \cdot b) \cdot x = a^p b^q c^r_{pq} c^l_{rs} x^s$, то есть

$$\Delta(a \cdot b) = \det(a^p b^q c^r_{pq} c^l_{rs})\,.$$

Между тем $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) = a^p b^q c^r_{qs} c^l_{pr} x^s$, поэтому

$$\det(a^p b^q c^r_{pq} c^l_{rs}) = \det(a^p c^l_{pr} b^q c^r_{qs}) = \det(a^p c^l_{pr}) \det(b^q c^r_{qs})\,.$$

И мы получаем тождество (2).

Мультипликативное свойство детерминантов дает основание взять детерминант $\Delta(x)$ произвольного элемента $x \in A_n$ в качестве фундаментальной формы на линейном пространстве алгебры. В этом случае легко найти группу $G \subset GL_n$ линейных преобразований, сохраняющих эту фундаментальную форму. Данную группу образует множество линейных алгебраических функций общего вида

$$x' = a \cdot x \cdot b\,, \tag{3}$$

где элементы $a, b \in A_n$ удовлетворяют условию

$$\Delta(a) = \Delta(b) = 1\,. \tag{4}$$

При этом очевидно, что множество элементов алгебры A_n, удовлетворяющих условию (4), образуют подгруппу S_1 в группе всех обратимых элементов этой алгебры.

Если в качестве базовой алгебры взять поле комплексных чисел $\mathbf{C}$, то $\Delta(x + iy) = x^2 + y^2$ и геометрическая структура поля комплексных чисел будет *евклидовой планиметрией* (что совпадает со стандартной геометрической интерпретацией комплексных чисел). А для алгебры двойных вещественных чисел $z = x + ye \in R_2$, где $e^2 = 1$, $\Delta(x + ye) = x^2 - y^2$, то есть геометрической структурой этой алгебры будет *псевдоевклидова планиметрия* (что также совпадает со стандартной геометрической интерпретацией двойных чисел $[2]$).

Обобщением алгебры двойных вещественных чисел и алгебры (поля) комплексных чисел являются алгебры R_m *циклических чисел* порядка m и алгебры $\overline{R}_m$ *антициклических чисел* порядка m соответственно $[3]$. Детерминантом произвольного циклического числа

$$x = x_0 + x_1 e + x_2 e^2 + \ldots + x_{m-1} e^{m-1} \in R_m$$

будет так называемый циркулянт $[4]$, который вычисляется по формуле

$$\Delta(x) = \prod_{k=0}^{m-1} (x_0 + x_1 \varepsilon_m^k + x_2 \varepsilon_m^{2k} + \ldots + x_{m-1} \varepsilon_m^{(m-1)k}), \qquad (5)$$

где $\varepsilon_m = \cos\dfrac{2\pi}{m} + i\sin\dfrac{2\pi}{m}$. При этом $\Delta(x)$ представляет собой вещественнозначную форму степени m. Например, при $m = 3$

$$\Delta(x + y\boldsymbol{e} + z\boldsymbol{e}^2) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Форма (5) берется в качестве фундаментальной формы геометрической структуры алгебры циклических чисел порядка m. А преобразования, сохраняющие $\Delta(x)$, то есть движения этой геометрической структуры, представляются линейными функциями такого вида:

$$x' = x \cdot \exp(\alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \ldots + \alpha_{m-1} e^{m-1}), \qquad (6)$$

так как можно показать, что

$$\Delta(\exp(\alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \ldots + \alpha_{m-1} e^{m-1})) = 1. \qquad (7)$$

Линейные пространства алгебр R_m с геометрической структурой, определяемой группой преобразований вида (6), называются *циклическими пространствами*, а геометрия таких пространств — *циклической геометрией*.

Евклидовы и псевдоевклидовы пространства произвольной размерности можно реализовать на алгебрах гиперкомплексных чисел Клиффорда, которые еще называют алгебрами альтернионов $[6]$. В этих алгебрах, обозначим их K_n, линейный базис составлен из единицы и всевозможных упорядоченных кортежей

$$e_{k_1 k_2 \dots k_r} \equiv e_{k_1} \cdot e_{k_2} \cdot \ldots \cdot e_{k_r}\ ,\ 1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r \le n\ ,$$

полученных произведением элементов из системы образующих $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. При этом произведение базисных элементов задается структурными тождествами

$$e_k \cdot e_r + e_r \cdot e_k = 0\,,\ \textit{если}\ k \ne r\ \ \textit{и}\ \ e_k^2 = \pm 1 \tag{8}$$

с учетом ассоциативности умножения.

Евклидовы и псевдоевклидовы структуры возникают на таких подпространствах E линейных пространств алгебр альтернионов, в которых квадрат вектора дает вещественнозначную квадратичную форму. И в такой интерпретации движения евклидовых и псевдоевклидовых пространств задаются клиффордозначными функциями следующего вида:

$$x' = a \cdot x \cdot a^{-1}\,, \tag{9}$$

отображающими подпространства $E \subset K_n$ на себя.

Непосредственным обобщением алгебр альтернионов будут так называемые *элементальные алгебры* $[5]$, которые обозначим B_n^m. Их линейный базис составлен из единицы и всевозможных упорядоченных кортежей

$$e^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \equiv e_1^{\alpha_1} \cdot e_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot e_n^{\alpha_n}\ ,\ 0 \le \alpha_i < m\ ,$$

полученных произведением элементов из системы образующих $e_1, e_2, \ldots, e_n$. При этом произведение базисных элементов задается структурными тождествами

$$\left.\begin{aligned} e_k \cdot e_r = \varepsilon_m e_r \cdot e_k, \quad \text{если } k > r \\ e_p \cdot e_q = \varepsilon_m^{m-1} e_q \cdot e_p, \quad \text{если } p < q \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

и $e_k^m = \pm 1$ с учетом ассоциативности умножения.

Геометрические структуры в элементальных алгебрах возникают на подпространствах E, таких, что для $x \in E$ степень x^m будет однородным многочленом (формой) степени m. Такие подпространства существуют в силу следующего тождества [5]:

$$(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n)^m = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m, \tag{11}$$

которое можно доказать при помощи структурных соотношений (10). А движения в этих подпространствах даются линейными функциями вида (9), отображающими подпространства $E \subset B_n^m$ на себя.

В пространствах с фундаментальной формой произвольной степени различные геометрические величины определяются при помощи этой формы аналогично тому, как в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах геометрические величины — посредством квадратичной фундаментальной формы. И поэтому такие пространства называются *почти евклидовыми* [5].

В частности, в почти евклидовых пространствах с формой $g_m(x)$ *норма вектора* определяется по формуле

$$\|x\| = \sqrt[m]{g_m(x)}\,. \tag{12}$$

И так же, как в псевдоевклидовых пространствах, в почти евклидовых пространствах норма вектора может выражаться вещественным либо комплексным числом. При этом образ в аффинном пространстве множества векторов имеющих одну и ту же норму, по аналогии с евклидовыми и псевдоевклидовыми пространствами называют *сфероидами*, а величину этой нормы — радиусом сфероида.

Заметим еще, что почти евклидовы пространства обладают многими свойствами, аналогичными свойствам евклидовых и псевдоевклидовых пространств. И потому они находят приложения в тех же разделах математики и теоретической физики, в которых естественным образом возникают структуры евклидовых и псевдоевклидовых геометрий.

Список литературы

1. *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основании геометрии // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М., 1979.
2. *Яглом И. М.* Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М., 1969.
3. *Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В.* Пространства над алгебрами. Калининград, 1985.
4. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. М., 1967.
5. *Бурлаков М. П.* Гамильтоновы алгебры. М., 2006.
6. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии. М., 1955.

I. Burlakov

Geometric structures on the linear algebras

We consider spaces with fundamental form of arbitrary degree. Such space can be implemented on linear algebras. As the fundamental form is taken determinants of common element of algebras or the product of several elements if it is a form with the values in the main field.

УДК 514.76

Н. Н. Дондукова

Бурятский государственный университет, г. Улан-Удэ

Специальные контактно 2-геодезические преобразования почти контактных метрических структур

Вводится специальный вид контактно-геодезических преобразований почти контактных метрических многообразий. Исследуются структурные тензоры почти контактных метрических многообразий, находится инвариант специального контактно 2-геодезических преобразования.

Ключевые слова: почти контактные метрические многообразия, геодезические преобразования.