4. *Букушева А.В.* О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Математика. Физика. 2015. №17, вып. 40. С. 20—24.

5. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Матем. 2013. №4. С. 10—18.

6. *Галаев С.В.* Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Изв. вузов. Матем. 2014. №8. С. 42—52.

7. *Вагнер В.В.* Геометрия (n – 1)-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1941. Вып. 5. С. 173—255.

A. Bukusheva

Isometric transformations of a prolonged almost contact metric structures with the complete lift metric

We consider the almost contact metric space with intrinsic metric connection. Extended Riemann structure with the complete lift metric is determined on distribution of almost contact metric structure. We study infinitesimal isometry of extended structure. It is shown that the total admissible lift infinitesimal isometry of base is isometry metric of complete lift.

УДК 513

И.М. Бурлаков
Тверской государственный университет
don.burlakoff@yandex.ru

Калибровочные алгебры на гладких многообразиях

Рассматриваются расслоения линейных алгебр на гладких многообразиях. Сечения расслоения линейных алгебр образуют калибровочную алгебру. Действие на этой алгебре фиксированной подгруппы мультипликативной группы определяет поля линейных геометрических объектов на базовом многообразии. А связность, согласованная с действием фиксированной подгруппы регулярной группы, задает инвариантное продолжение алгебраического дифференцирования линейных геометрических объектов.

Ключевые слова: алгебры, векторные расслоения, калибровочные поля, калибровочные группы, связность, алгебраическое дифференцирование, инвариантное продолжение.

Рассмотрим гладкое многообразие M, $\dim M = n$, и над каждым касательным пространством T_x, $x \in M$, построим линейную алгебру A_x, изоморфную некоторой фиксированной ассоциативной и унитальной алгебре A с подстилающим пространством V, $\dim V = n$. При этом будем считать, что единица алгебры не принадлежит V. Объединение $AM \equiv \bigcup\limits_{x \in M} A_x$ представляет собой тотальное пространство векторного расслоения с базой M, проекцией $\rho : AM \to M$, $\rho(A_x) = x$, и типовым слоем A [1]. Сечения этого расслоения $\eta : M \to AM$ образуют бесконечномерную ассоциативную унитальную алгебру $A(M)$ с поточечным умножением полей $\eta(x)$.

Пусть теперь на алгебре $\mathbf{A}$ задано сопряжение [2]. Тогда на $A(M)$ будет определена форма $g(\eta(x)) = \eta(x) \cdot \overline{\eta}(x)$, принимающая значения в подалгебре $F(M) \subset A(M)$, порожденной единичным полем $\varepsilon(x)$.

Обозначим $G(M)$ подгруппу регулярной группы алгебры $A(M)$, элементами которой будут сечения $\alpha(x)$, удовлетворяющие условию $\alpha(x) \cdot \overline{\alpha}(x) = \varepsilon(x)$. И пусть $L_G(M)$, $R_G(M)$, $Ad_G(M)$ — множества элементарных линейных функций вида

$$\eta'(x) = \alpha(x) \cdot \eta(x), \tag{1}$$

$$\eta'(x) = \eta(x) \cdot \overline{\alpha}(x), \tag{2}$$

$$\eta'(x) = \alpha(x) \cdot \eta(x) \cdot \overline{\alpha}(x). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что множества $L_G(M)$, $R_G(M)$ и $Ad_G(M)$ относительно суперпозиции функций образуют группы, гомоморфные группе $G(M)$. При этом форма $g(x)$ будет инвариантна относительно действия групп $L_G(M)$, $R_G(M)$ и $Ad_G(M)$. Например, если $\eta'(x) = \alpha(x) \cdot \eta(x)$, то

$$g(\eta'(x)) = \eta'(x) \cdot \overline{\eta}'(x) = (\alpha(x) \cdot \eta(x)) \cdot (\overline{\alpha(x) \cdot \eta(x)}) =$$
$$= \alpha(x) \cdot (\eta(x) \cdot \overline{\eta}(x)) \cdot \overline{\alpha}(x) = \eta(x) \cdot \overline{\eta}(x) = g(\eta(x)).$$

Таким образом, относительно действия *локальных* (или *калибровочных*) групп $L_G(M)$, $R_G(M)$ и $Ad_G(M)$ сечения $\eta(x)$ расслоения алгебр с сопряжением представляют собой *калибровочные поля* [3], так что алгебра с сопряжением $A(M)$ будет алгеброй калибровочных полей, или *калибровочной алгеброй*.

Сечения расслоения алгебр с сопряжением, как калибровочные поля на гладком многообразии, различаются относительно действия группы $G(M)$. Если калибровочное поле $\xi(x)$ преобразуется по закону (1), то это поле называется G-спинорным, если поле $\zeta(x)$ преобразуется по закону (2), то поле называется G-коспинорным, если же поле $v(x)$ преобразуется по закону (3), то оно называется G-векторным. При этом в силу линейности функций (1—3) поля каждого вида образуют модуль в калибровочной алгебре $A(M)$.

Модельным примером калибровочной алгебры на гладком многообразии может служить алгебра сечений клиффордовых расслоений [4]. Здесь типовым слоем будет алгебра Клиффорда $C_{p,q}$ и, соответственно, сечениями клиффордова расслоения будут формальные суммы поливекторных полей.

Линейный оператор $\partial : A(M) \to A(M)$ называется *алгебраическим дифференцированием*, если для любых калибровочных полей $\eta(x)$ и $\mu(x)$ справедливо тождество Лейбница

$$\partial(\eta(x) \cdot \mu(x)) = (\partial\eta(x)) \cdot \mu(x)) + \eta(x) \cdot (\partial\mu(x)). \tag{4}$$

Алгебраическое дифференцирование ∂, определенное локально в каждом слое A_x, не инвариантно относительно действия группы $G(M)$ на калибровочные поля. Однако если на алгебре $A(M)$ задать поле, которое под действием группы $G(M)$ изменяется по такому закону:

$$\gamma_\partial(x) = \alpha(x)\cdot\gamma_\partial(x)\cdot\overline{\alpha}(x) - (\partial\alpha(x))\cdot\overline{\alpha}(x), \qquad (5)$$

где $\alpha(x)\in A(M)$, то по оператору ∂ можно определить операторы алгебраического дифференцирования, которые будут инвариантны относительно линейного действия группы $G(M)$. Такие операторы называются инвариантным продолжением алгебраического дифференцирования ∂, а поле $\gamma_\partial(x)$ — G-связностью оператора ∂.

Теорема (*об инвариантном продолжении*). *Пусть ∂ — какое-либо алгебраическое дифференцирование, $\gamma_\partial(x)$ — некоторое поле связности оператора ∂, а $\xi(x)$, $\zeta(x)$ и $v(x)$ — соответственно любые* G-*спинорные,* G-*коспинорные и* G-*векторные поля. Тогда операторы, определенные на этих полях по формулам*

$$\delta^L_\partial(\xi(x)) = \partial(\xi(x)) + \gamma_\partial(x)\cdot\xi(x), \qquad (6)$$

$$\delta^R_\partial(\zeta(x)) = \partial(\zeta(x)) - \zeta(x)\cdot\gamma_\partial(x), \qquad (7)$$

$$\delta_\partial(v(x)) = \partial(v(x)) + \gamma_\partial(x)\cdot v(x) - v(x)\cdot\gamma_\partial(x), \qquad (8)$$

будут инвариантными относительно линейного действия группы $G(M)$.

Доказательство. Для G-спинорного поля $\xi(x)$

$$\delta^L_\partial(\xi'(x)) \equiv \delta^L_\partial(\alpha(x)\cdot\xi(x)) = \partial(\alpha(x)\cdot\xi(x)) +$$

$$+\gamma'_\partial(x)\cdot(\alpha(x)\cdot\xi(x)) = \partial(\alpha(x))\cdot\xi(x) + \alpha(x)\cdot\partial(\xi(x)) +$$

$$+(\alpha(x)\cdot\gamma_\partial(x)\cdot\overline{\alpha}(x))\cdot(\alpha(x)\cdot\xi(x)) - (\partial\alpha(x))\cdot\overline{\alpha}(x)\cdot\alpha(x)\cdot\xi(x) =$$

$$= \alpha(x)\cdot\partial(\xi(x)) + \alpha(x)\cdot\gamma_\partial(x)\cdot\xi(x) = \alpha(x)\cdot\delta^L_\partial(\xi(x)).$$

Аналогично доказывается инвариантность операторов δ_∂^R и δ_∂, то есть тождества

$$\delta_\partial^R(\zeta(x)\cdot\overline{\alpha}(x)) = (\delta_\partial^R(\zeta(x))\cdot\overline{\alpha}(x),$$

$$\delta_\partial(\alpha(x)\cdot v(x)\cdot\overline{\alpha}(x)) = \alpha(x)\cdot(\delta_\partial(v(x))\cdot\overline{\alpha}(x). \ \square$$

Операторы $\delta_\partial^L, \delta_\partial^R$ и δ_∂ называются *инвариантными продолжениями* алгебраического дифференцирования ∂. Посмотрим, как они действуют на произведение различных калибровочных полей.

Из формул (1—3) видно, что произведение G-векторных полей будет снова G-векторным полем. В то же время произведение G-спинорного поля на G-коспинорное поле будет G-векторным полем, а произведение G-коспинорного поля на G-спинорное поле будет G-скалярным полем.

Возьмем два G-векторных поля $v_1(x)$ и $v_2(x)$, тогда

$$(\delta_\partial v_1(x))\cdot v_2(x) + v_1(x)\cdot(\delta_\partial v_2(x)) =$$

$$= (\partial(v_1(x)) + \gamma_\partial(x)\cdot v_1(x) - v_1(x)\cdot\gamma_\partial(x))\cdot v_2(x) +$$

$$+ v_1(x)\cdot(\partial(v_2(x)) + \gamma_\partial(x)\cdot v_2(x) - v_2(x)\cdot\gamma_\partial(x)) =$$

$$= (\partial(v_1(x))\cdot v_2(x) + (v_1(x)\cdot\partial(v_2(x)) +$$

$$+ \gamma_\partial(x)\cdot v_1(x)\cdot v_2(x) - v_1(x)\cdot v_2(x)\cdot\gamma_\partial(x)) = \delta_\partial(v_1(x)\cdot v_2(x)),$$

то есть оператор δ_∂ является *алгебраическим дифференцированием* G-векторных полей. Аналогично доказываются тождества Лейбница для операторов инвариантно продолженного дифференцирования произведений G-спинорных и G-коспинорных полей $\xi(x)$ и $\zeta(x)$:

$$\delta_\partial(\xi(x)\cdot\zeta(x)) = \delta_\partial^L(\xi(x))\cdot\zeta(x) + \xi(x)\cdot(\delta_\partial^R\,\zeta(x)),$$

$$\partial(\zeta(x)\cdot\xi(x))=\delta^R_\partial(\zeta(x))\cdot\xi(x)+\zeta(x)\cdot(\delta^L_\partial\,\xi(x)).$$

Если теперь предположить, что алгебраические дифференцирования ∂_1 и ∂_2 принадлежат некоторой алгебре Ли (так что определен коммутатор этих алгебраических дифференцирований), то коммутаторы инвариантных продолжений сведутся к умножению на некоторое G-векторное поле, представляющее *кривизну* калибровочной алгебры на гладком многообразии. То есть справедливо следующее утверждение.

Теорема (*о кривизне*). *Если* $\xi(x)$*,* $\zeta(x)$ *и* $v(x)$ *соответственно любые G-спинорные, G-коспинорные и G-векторные поля, а* ∂_1 *и* ∂_2 *принадлежат некоторой алгебре Ли, то*

$$([\delta^L_{\partial_1},\delta^L_{\partial_2}]-\delta^L_{[\partial_1,\partial_2]})\xi(x)=K(\gamma_{\partial_1},\gamma_{\partial_2})\cdot\xi(x), \tag{9}$$

$$([\delta^R_{\partial_1},\delta^R_{\partial_2}]-\delta^R_{[\partial_1,\partial_2]})\zeta(x)=-\zeta(x)\cdot K(\gamma_{\partial_1},\gamma_{\partial_2}), \tag{10}$$

$$([\delta_{\partial_1},\delta_{\partial_2}]-\delta_{[\partial_1,\partial_2]})v(x)=$$

$$=K(\gamma_{\partial_1},\gamma_{\partial_2})\cdot v(x)-v(x)\cdot K(\gamma_{\partial_1},\gamma_{\partial_2}); \tag{11}$$

$$K(\gamma_{\partial_1},\gamma_{\partial_2})=\partial_1\gamma_{\partial_2}-\partial_2\gamma_{\partial_1}+\gamma_{\partial_1}\cdot\gamma_{\partial_2}-\gamma_{\partial_2}\cdot\gamma_{\partial_1}-\gamma_{[\partial_1,\partial_2]}. \tag{12}$$

Доказательство. Возьмем произвольное G-спинорное поле $\xi(x)$, тогда

$$\delta^L_{\partial_1}\delta^L_{\partial_2}(\xi(x))=\partial_1\partial_2(\xi(x))+\partial_1\gamma_{\partial_2}(x)\cdot\xi(x)+\gamma_{\partial_2}(x)\cdot\partial_1\xi(x)+$$

$$+\gamma_{\partial_1}(x)\cdot\partial_2(\xi(x))+\gamma_{\partial_1}(x)\cdot\gamma_{\partial_2}(x)\cdot\xi(x),$$

$$\delta^L_{\partial_2}\delta^L_{\partial_1}(\xi(x))=\partial_2\partial_1(\xi(x))+\partial_2\gamma_{\partial_1}(x)\cdot\xi(x)+\gamma_{\partial_1}(x)\cdot\partial_2\xi(x)+$$

$$+\gamma_{\partial_2}(x)\cdot\partial_1(\xi(x))+\gamma_{\partial_2}(x)\cdot\gamma_{\partial_1}(x)\cdot\xi(x),$$

$$(\delta^L_{\partial_1}\delta^L_{\partial_2}-\delta^L_{\partial_2}\delta^L_{\partial_1})(\xi(x))=(\partial_1\partial_2-\partial_2\partial_1)\xi(x)+$$

$$+(\partial_1\gamma_{\partial_2}(x)-\partial_2\gamma_{\partial_1}(x)+\gamma_{\partial_1}(x)\cdot\gamma_{\partial_2}(x)-\gamma_{\partial_2}(x)\cdot\gamma_{\partial_1}(x))\cdot\xi(x),$$

тогда, учитывая, что

$$\delta^L_{[\partial_1,\partial_1]})(\xi(x)) = (\partial_1\partial_2 - \partial_2\partial_1)\xi(x) + \gamma_{[\partial_1,\partial_1]} \cdot \xi(x),$$

мы получим

$$(\delta^L_{\partial_1}\delta^L_{\partial_2} - \delta^L_{\partial_2}\delta^L_{\partial_1} - \delta^L_{[\partial_1,\partial_1]})(\xi(x)) = K(\gamma_{\partial_1}, \gamma_{\partial_2}) \cdot \xi(x).$$

Аналогично доказываются тождества (10) и (11). □

Заметим еще, что в расслоении клиффордовых алгебр, когда в качестве группы $G(M)$ берется $\mathrm{Spin}(M)$, а алгебраическими дифференцированиями будут векторные поля ∂, их инвариантное продолжение представляет собой ковариантную производную [4; 5].

Список литературы

1. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М., 1970.
2. *Бурлаков И.М.* Алгебры с сопряжением и геометрия неквадратичных форм // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2014. Вып. 46. С. 29—34.
3. *Нелипа Н.Ф.* Физика элементарных частиц. Калибровочные поля. М., 1985.
4. *Бурлаков М.П., Евтушик Л.Е.* Клиффордова структура и клиффордово дифференцирование на римановых пространствах // Вестник МГУ. Сер. 1 : Математика, механика. 1994. №2. С. 67—74.
5. *Бурлаков М.П.* Клиффордовы связности на римановых пространствах // Известия вузов. Математика. 1990. №7. С. 3—7.

I. Burlakov

Gauge algebras on a smooth manifold

The bundle of linear algebra on smooth manifolds are considered. The cross-sections of bundle of linear algebra form a gauge algebra. Action on this algebra of fixed subgroups of the multiplicative group determines the linear geometrical objects field in the base manifold. A connection compatible with the action of a fixed subgroup of regular group sets invariant extension of algebraic derivations of linear geometrical objects.